# Cônes positifs des variétés complexes compactes

Sébastien Boucksom

11 décembre 2002

# Table des matières

## 0.1 Introduction

### Positivité

L'un des traits fondamentaux de la géométrie complexe est l'existence d'une notion intrinsèque de positivité au niveau des formes différentielles, introduite par P.Lelong. Le cas qui nous préoccupera en priorité est le suivant :

une forme de type $(1,1)$ $\alpha$ sur une variété complexe $X$ s'écrit localement $\alpha = i\sum_{1\leq j,k\leq n}\alpha_{jk}dz_j\wedge d\overline{z}_k$ dans des coordonnées locales $(z_1,...,z_n)$, et la forme $\alpha$ est dite positive ssi la matrice $(\alpha_{jk})$ est hermitienne positive en tout point. En particulier, du point de vue de la géométrie différentielle, la positivité d'un fibré en droites holomorphe $L$ sur $X$ correspond à la positivité de la $(1,1)$-forme de courbure d'une métrique hermitienne sur $L$.
Un autre aspect caractéristique des variétés complexes est la relative absence d'objets holomorphes globaux sur une variété complexe compacte $X$. Ainsi, l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes globales d'un fibré vectoriel holomorphe $E$ sur une variété complexe compacte $X$ est de dimension finie, et d'ailleurs réduit à zéro la plupart du temps. De même, l'existence d'une application non-triviale de $X$ vers une variété mieux comprise est relativement rare. Les deux phénomènes sont en fait liés, puisque les applications méromorphes $f : X - \to \mathbf{P}^N$ vers un espace projectif sont en correspondance avec les systèmes linéaires sur $X$, i.e. les espaces de sections $H^0(X,L)$ des fibrés en droites $L$ sur $X$, et leurs sous-espaces vectoriels. De ce point de vue, issu de la géométrie algébrique, la positivité d'un fibré en droites $L$ se mesure à l'abondance de ses sections globales.
L'exemple typique de relation entre ces deux concepts de positivité est le théorème de plongement de Kodaira :

**Théorème 0.1.1 (Kod53)** *Soit $X$ une variété complexe compacte, et $L$ un fibré en droites sur $X$. Sont équivalentes :*
*(i) $L$ peut être muni d'une métrique hermitienne $h$ à courbure strictement positive.*
*(ii) $L$ est ample, i.e. le système linéaire associé à $L^{\otimes k}$ plonge $X$ dans un espace projectif pour $k \gg 1$.*

L'amplitude d'un fibré en droites se manifeste donc déjà au niveau cohomologique sur sa classe de Chern : $L$ est ample ssi $c_1(L)$ appartient au cône kählerien $\mathcal{K}_X$ de $X$, i.e. le cône convexe de $H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ formé des classes de $(1,1)$-formes fermées strictement positives. Il existe une "version biméromorphe" de ce résultat, due à Bonavero [Bon93] et indépendamment à Ji et Shiffman [JS93], qui énonce que $L$ est un fibré gros, i.e. le système linéaire associé à $L^{\otimes k}$ plonge $X$ biméromorphiquement dans un espace projectif, ssi $c_1(L)$ appartient au cône gros $\mathcal{G}_X$ de $X$, i.e. le cône convexe de $H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ formé des classes de $(1,1)$-courants fermés strictement positifs.
En passant à la limite, on obtient deux notions de (semi-)positivité associées : une classe réelle $\alpha$ de type $(1,1)$ est dite nef (numériquement effective) ssi elle peut être représentée par des $(1,1)$-formes réelles dont la partie négative est arbitrairement petite, et $\alpha$ est dite pseudoeffective ssi elle peut être représentée par un courant positif fermé.

**Décomposition de Zariski divisorielle**

Dans la première partie de ce travail, nous nous intéresserons aux relations entre pseudoeffectivité et effectivité numérique. Un $(1,1)$-courant fermé $T$ presque positif (i.e. de partie négative bornée) a en général $X$ tout entier comme support singulier, mais ses singularités de type analytique, à savoir celles prises en compte par ses nombres de Lelong, prennent une place plus raisonnable : elles se situent le long d'une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés (stricts) de $X$. On sait de plus depuis [Dem92] que les singularités de type analytique de $T$ sont exactement l'obstruction à la régularisation de $T$ en perdant arbitrairement peu de positivité. Partant de cette observation, nous introduisons la multiplicité minimale $\nu(\alpha,x)$ d'une $(1,1)$-classe pseudoeffective $\alpha$ en un point $x$, qui mesure l'obstruction à l'effectivité numérique de $\alpha$ localement en $x$ : $\nu(\alpha,x)=0$ ssi il existe dans $\alpha$ des courants de partie négative arbitrairement petite qui soient lisses près de $x$. Le lieu des points $x\in X$ où $\nu(\alpha,x)>0$ est une réunion dénombrable d'ensembles analytiques que nous appelons le lieu non nef de $\alpha$. Nous démontrons que le lieu non nef d'une $(1,1)$-classe pseudoeffective $\alpha$ ne contient qu'un nombre fini de diviseurs irréductibles, de sorte que la partie divisorielle de ce lieu non nef, comptée avec multiplicités, est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif noté $N(\alpha)$, la partie négative de $\alpha$. Par construction, la différence $Z(\alpha):=\alpha-\{N(\alpha)\}$ est alors une classe nef en codimension 1, au sens où son lieu non nef ne contient plus de diviseurs. La décomposition $\alpha=Z(\alpha)+\{N(\alpha)\}$, que nous appellerons décomposition de Zariski divisorielle, est l'analogue en cohomologie de la décomposition de Siu d'un courant positif fermé. La partie positive $Z(\alpha)$ définit une projection canonique du cône pseudoeffectif sur le cône des classes nef en codimension 1, qui est homogène et concave. La partie négative est quant à elle un diviseur exceptionnel, au sens où elle est sa propre partie négative. Un tel diviseur est plongé très rigidement dans $X$ : il est déterminé par sa classe de cohomologie, et peut être contracté sur un point par une modification dans le cas d'une surface.

Nous étudions les propriétés de continuité des multiplicités minimales et de la décomposition de Zariski divisorielle, et nous démontrons la caractérisation suivante de cette décomposition

**Théorème 0.1.2** *Soit $\alpha$ une $(1,1)$-classe grosse. Alors sa décomposition de Zariski divisorielle est l'unique décomposition $\alpha=p+\{N\}$ telle que :*
*(i) $p$ est une classe grosse et nef en codimension 1.*
*(ii) $N$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif.*
*(iii) le support de $N$ est contenu dans le lieu non kählerien de $p$.*

La troisième condition est une condition d'orthogonalité. Le lieu non kählerien de $p$ est l'ensemble des points de $X$ en lesquels tous les courants kählériens (i.e. strictement positifs) contenus dans la classe $p$ ont un nombre de Lelong strictement positif. Nous utilisons finalement notre construction pour étudier la structure géométrique du cône pseudoeffectif :

**Théorème 0.1.3** *Le cône pseudoeffectif d'une variété complexe compacte est localement polyhédral en dehors du cône nef en codimension 1, de rayons extrémaux engendrés par les diviseurs irréductibles exceptionnels.*

**Traduction algébrique**

Lorsque la $(1,1)$-classe $\alpha$ est la première classe de Chern d'un fibré en droites $L$, on peut facilement associer à toute famille de sections globales de $L$ (ou plus généralement de $kL$) un courant positif fermé dans $\alpha$ dont les singularités reflètent précisément l'ensemble base de ces sections, lieu de leurs zéros communs. Ceci permet par exemple de voir que le lieu non nef de $\alpha$ est contenu dans l'ensemble base de $|kL|$ pour tout $k > 0$. Lorsque $X$ est de plus projective, la théorie des estimées $L^2$ pour l'opérateur $\overline{\partial}$ permet réciproquement de construire des sections à partir de courants, ce qui nous permet de caractériser les multiplicités minimales en termes algébriques :

**Théorème 0.1.4** *Si $L$ est un fibré en droites gros sur une variété projective, alors la multiplicité minimale de $c_1(L)$ en $x$ est égale à la limite*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} mult_x |kL|.$$

La multiplicité $mult_x|kL|$ est la plus petite multiplicité en $x$ des éléments de $|kL|$. Il découle de ce résultat la caractérisation suivante de la décomposition de Zariski divisorielle :

**Théorème 0.1.5** *La décomposition de Zariski divisorielle d'un fibré en droites gros $L$ est l'unique décomposition $L = P + N$ telle que :*
*(i) $P$ est un $\mathbf{R}$-diviseur nef en codimension 1.*
*(ii) $N$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif.*
*(iii) $H^0(kL) = H^0(\lfloor kP \rfloor)$ pour tout $k$.*

En d'autres termes, la décomposition de Zariski divisorielle ramène l'étude asymptotique des systèmes linéaires $|kL|$ au cas où $L$ est nef en codimension 1, à condition d'accepter des diviseurs à coefficients réels. Le problème de la décomposition de Zariski tel qu'il est soulevé en géométrie algébrique consiste en fait à demander si on peut rendre la partie positive $P$ nef, quitte à éclater $X$. La réponse est négative, de même que la partie négative $N(\alpha)$ n'est pas rationnelle en générale, même si $\alpha$ l'est. Mais on peut par contre construire des décompositions de Zariski approchées, qui vont constituer la base de ce qui va suivre.

**Volume d'un fibré en droites**

Comme on l'a dit plus haut, un fibré en droites $L$ est gros si le système linéaire $|kL|$ induit un plongement biméromorphe pour $k$ assez grand, et ceci revient à dire que sa dimension de Kodaira-Iitaka est maximale, égale à $n = \dim X$. La croissance du nombre de sections $h^0(kL)$ est donc de l'ordre de $k^n$ dans ce cas, et le volume de $L$ est (à un facteur $n!$ près) le coefficient de $k^n$ dans cet équivalent. Lorsque $L$ est nef, la formule de Riemann-Roch implique que son volume $v(L)$ n'est autre que son autointersection $L^n$, et le volume d'un fibré pseudoeffectif quelconque est moralement l'autointersection de sa partie nef dans sa décomposition de Zariski. C'est en substance ce que dit le résultat d'approximation suivant, dû à T.Fujita :

**Théorème 0.1.6 (Fuj94, DEL00)** *Soit $L$ un fibré en droites gros sur une variété projective. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ et une décomposition $\mu^\star L = A + E$ telle que :*
*(i) $A$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample.*
*(ii) $E$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif.*
*(iii) $|v(L) - v(A)| < \varepsilon$.*

Du point de vue de la géométrie différentielle, le théorème de Calabi-Yau permet de munir tout fibré ample $A$ d'une métrique hermitienne $h$ dont la courbure moyenne est constante, partout égale au volume $A^n$ de $A$. En utilisant le théorème d'approximation de Fujita ci-dessus, nous donnons une version singulière de ce résultat, qui s'applique à un fibré en droites pseudoeffectif :

**Théorème 0.1.7** *Soit $L$ un fibré en droites pseudoeffectif sur une variété kählerienne $X$. Alors son volume vérifie :*

$$v(L) = \sup_T \int_X T_{ac}^n,$$

*où $T$ décrit l'ensemble des courants positifs fermés dans $c_1(L)$. De plus, pour toute forme kählerienne $\omega$ de volume 1, il existe un courant positif fermé $T \in c_1(L)$ réalisant le supremum, et tel que*

$$T_{ac}(x)^n = v(L)\omega(x)^n$$

*pour presque tout $x \in X$.*

Dans ce résultat, $T_{ac}$ désigne la partie absolument continue du courant $T$ relativement à la mesure de Lebesgue. Cet énoncé caractérise en particulier les fibrés gros en terme d'intégrales de courbures, dans la veine de Grauert-Riemenschneider, et il montre que le volume de $L$ ne dépend que de sa première classe de Chern. Il est donc naturel d'introduire le volume d'une $(1,1)$-classe quelconque, afin de disposer d'une mesure quantitative de sa positivité :

**Définition 0.1.8** *Le volume d'une $(1,1)$-classe $\alpha$ sur une variété compacte kählerienne est défini par*

$$v(\alpha) := \sup_T \int_X T_{ac}^n,$$

*où $T$ décrit les courants positifs fermés dans $\alpha$ (et $v(\alpha) = 0$ s'il n'y en a pas).*

La philosophie sous-jacente est que les décompositions de Lebesgue $T = T_{ac} + T_{sg}$ des courants positifs dans $\alpha$ fournissent des décompositions de Zariski approchées de $\alpha$, donc l'autointersection de sa partie nef s'approche par celle de $T_{ac}$. L'outil technique qui nous permet de mettre en oeuvre cette idée est une version légèrement raffinée d'un théorème d'approximation des $(1,1)$-courants fermés dû à J.-P.Demailly [Dem92], qui permet d'approcher en perdant arbitrairement peu de positivité un courant positif fermé $T$ par des courants cohomologues n'ayant que des singularités analytiques, tout en assurant la convergence des parties absolument continues. Grâce à ce résultat, nous pouvons généraliser le théorème d'approximation de Fujita ainsi que le résultat du type Calabi-Yau au cas d'une $(1,1)$-classe arbitraire, lesquels s'appliquent pour étudier quelques propriétés du volume :

**Théorème 0.1.9** *Le volume $v : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, et la restriction au cône pseudoeffectif de $v(\alpha)^{1/n}$ est homogène et concave.*

La question la plus épineuse reste finalement de savoir si le volume caractérise effectivement les classes grosses, comme c'est le cas pour les fibrés en droites :

**Théorème 0.1.10** *Le volume d'une $(1,1)$-classe $\alpha$ est strictement positif ssi $\alpha$ est grosse.*

Nous démontrons ce résultat en appliquant le cas nef, démontré par Demailly et Paun [DP01], à des décompositions de Zariski approchées de $\alpha$.

### Nombres d'intersections mobiles et constantes de Seshadri

Le volume d'une $(1,1)$-classe pseudoeffective est virtuellement l'autointersection de sa partie nef dans sa décomposition de Zariski, et on sait comment réaliser une approximation de cette dernière en considérant les courants à singularités analytiques avec une petite partie négative dans la classe. Nous construisons plus généralement un nombre d'intersections mobiles $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0}$ de $n$ classes pseudoeffectives $\alpha_i$, qui prend en compte les intersections des parties nef des classes $\alpha_i$. Ces nombres d'intersections mobiles satisfont à des propriétés de concavité qui généralisent celles des nombres d'intersections de classes nef, et permettent d'obtenir une notion satisfaisante de dimension numérique pour une classe pseudoeffective, vérifiant les propriétés suivantes :

**Théorème 0.1.11** *Soit $\alpha$ une $(1,1)$-classe pseudoeffective. Alors :*
*(i) Sa dimension numérique est nulle ssi sa projection de Zariski $Z(\alpha)$ est nulle, i.e. $\alpha$ est la classe d'un diviseur exceptionnel.*
*(ii) Sa dimension numérique est maximale ssi $\alpha$ est grosse.*

Pour illustrer cette notion de dimension numérique, nous donnons la généralisation suivante d'une version du théorème d'annulation de Bogomolov due à C.Mourougane :

**Théorème 0.1.12** *Soit $L$ un fibré en droites pseudoeffectif sur une variété compacte kählerienne $X$. Alors*

$$H^0(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}_X(-L)) = 0$$

*pour $p < \nu(L)$, la dimension numérique de $L$.*

Dans le même ordre d'idées, nous introduisons la constante de Seshadri $\varepsilon(\alpha, x)$ d'une classe pseudoeffective $\alpha$ en un de ses points nefs $x$, qui mesure la positivité locale de $\alpha$ en ce point. Moralement, cette positivité se concentre dans sa partie nef, et cette constante de Seshadri n'est donc que la constante de Seshadri usuelle de sa partie nef. Nous montrons alors le résultat suivant, qui généralise un théorème de N.Takayama [Tak01] :

**Théorème 0.1.13** *Soit $\alpha$ une $(1,1)$-classe pseudoeffective sur une variété compacte kählerienne, et $x$ un de ses points nefs. Alors le volume de $\alpha$ vérifie $v(\alpha) \geq \varepsilon(\alpha, x)^n$. En particulier, $\alpha$ est grosse ssi l'une de ses constantes de Seshadri est non nulle.*

**Cônes positifs sur une variété hyperkählerienne**

Une variété compacte hyperkählerienne peut être vue comme une variété kählerienne munie d'une forme symplectique holomorphe. On construit grâce à cette dernière une forme quadratique sur $H^2(X, \mathbf{C})$, la forme de Beauville-Bogomolov, qui jouit de propriétés algébriques analogues à celles de la forme d'intersection sur une surface. Notre but est d'étudier en parallèle la positivité sur les surfaces et les variétés hyperkähleriennes en fonction de ces formes quadratiques, que nous noterons $q$ dans les deux cas. Commençons par le cas des surfaces, essentiellement bien connu :

**Théorème 0.1.14** *Soit $X$ une surface compacte kählerienne.*
*(i) Le cône kählerien de $X$ est une des composantes connexes de l'ensemble des $(1,1)$-classes $\alpha$ vérifiant $\alpha^2 > 0$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute courbe irréductible*

*$C$ de carré $< 0$.*
*(ii) Le cône nef en codimension 1 coincide avec le cône nef, et il est en dualité avec le cône pseudoeffectif.*

Lorsque $X$ est hyperkählerienne, nous démontrons les résultats suivants, qui reposent fortement sur les travaux de D.Huybrechts :

**Théorème 0.1.15** *Soit $X$ une variété compacte hyperkählerienne.*
*(i) Le cône kählerien de $X$ est une des composantes de l'ensemble des $(1,1)$-classes $\alpha$ vérifiant $q(\alpha) > 0$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute courbe irréductible rationelle $C$.*
*(ii) Le cône nef en codimension 1 est en dualité avec le cône pseudoeffectif sous la forme $q$. Il coincide aussi avec l'adhérence du cône kählerien birationnel, ensemble des classes qui s'envoient sur une classe kählerienne par une application birationnelle entre variétés hyperkähleriennes.*

La décomposition de Zariski divisorielle admet elle aussi une interprétation géométrique en fonction de la forme quadratique $q$. On suppose à nouveau que $X$ est une surface ou une variété hyperkählerienne :

**Théorème 0.1.16** *(i) Un $\mathbf{R}$-diviseur effectif $E = \sum a_j E_j$ est exceptionnel ssi la matrice de Gram $(q(E_i, E_j))$ est définie négative.*
*(ii) La décomposition de Zariski divisorielle d'une $(1,1)$-classe pseudoeffective $\alpha$ est l'unique décomposition $q$-orthogonale de $\alpha$ en la somme d'une classe nef en codimension 1 et de la classe d'un $\mathbf{R}$-diviseur exceptionnel.*

La partie négative d'une classe pseudoeffective est donc sa projection orthogonale sur l'une des faces du cône pseudoeffectif dans sa partie polyhédrale. La face en question étant définie sur $\mathbf{Q}$, le résultat précédent implique en particulier la rationalité de la décomposition de Zariski divisorielle. Il en résulte le

**Corollaire 0.1.17** *Si $L$ est un fibré en droites pseudoeffectif sur une variété compacte hyperkählerienne, il existe un unique $\mathbf{Q}$-fibré en droites nef en codimension 1 $P$ tel que $L - P$ soit effectif et tel que l'inclusion naturelle*

$$H^0(X, kL) \to H^0(X, kP)$$

*soit un isomorphisme pour tout $k$ tel que $kP$ soit à coefficients entiers.*

# Chapitre 1

# Préliminaires

## 1.1 Généralités sur les courants

### 1.1.1 Premières propriétés

Un courant de dimension $q$ sur une variété réelle $M$ de dimension $m$ est une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}^q(M)$ des $q$-formes différentielles lisses à support compact sur $M$. On note $\mathcal{D}'_q(M)$ l'espace vectoriel des courants de dimension $q$ sur $M$ et $\langle T, u\rangle$ le crochet de dualité entre une $q$-forme lisse $u$ et un courant $T$ de dimension $q$. De ce point de vue, la notion de courant généralise celle de chaîne, et l'exemple fondamental de courant de dimension $q$ est en effet le courant d'intégration sur une sous-variété orientée (éventuellement à bord) $N \subset M$ de dimension $q$, noté $[N]$ et défini comme suit :

$$\langle [N], u\rangle := \int_N u.$$

Si $f : M \to L$ est une application lisse et propre entres variétés réelles, l'opération $f^\star$ de rapatriement des formes préserve le degré et la propriété d'être à support compact, donc induit par transposition un opérateur $f_\star$ d'image directe au niveau des courants, qui préserve la dimension de ceux-ci.

Si l'on suppose la variété $M$ orientée (ce que nous ferons désormais), un courant $T$ de dimension $q$ peut aussi se concevoir comme une forme de degré $(m-q)$ à coefficients distributions, et l'on écrit alors $\langle T, u\rangle =: \int_M T \wedge u$. L'entier $m - q$ s'appelle le degré de $T$, et l'on note aussi

$$\mathcal{D}'^{m-q}(M) = \mathcal{D}'_q(M)$$

lorsque l'on veut insister sur le degré. En particulier, à une $q$-forme à coefficients localement intégrables correspond injectivement un courant de degré $q$, que nous ne distinguerons pas de la forme en général.

On peut multiplier un courant $T$ de degré $q$ par une forme lisse $u$ de degré $p$ de sorte que $T \wedge u = (-1)^{pq} u \wedge T$, en forçant l'associativité $\int_M (T \wedge u) \wedge v = \int_M T \wedge (u \wedge v)$ pour toute forme test $v$, et on peut appliquer à $T$ tout opérateur (pseudo)-différentiel $P(D)$ en posant $\langle P(D)T, u\rangle := \langle T, P(D)^\star u\rangle$, où $P(D)^\star$ est l'adjoint formel de $P(D)$. Par exemple, si $N \subset M$ est une sous-variété à bord orientée de $M$, la dérivée $d[N]$ du courant d'intégration sur $N$ est égale au signe près au courant d'intégration $[\partial N]$ sur le bord de $N$. Si l'on note $\mathcal{D}'^q$ le faisceau des germes de courants de degré $q$, la dérivée extérieure définit un complexe de de Rham (local)

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{D}'^0 \to \ldots \to \mathcal{D}'^m \to 0 \to \ldots,$$

qui est exact d'après le dual du lemme de Poincaré. Chaque faisceau $\mathcal{D}'^q$ est acyclique comme tous les $\mathcal{C}^\infty$-modules, et il resulte du théorème de de Rham-Weil que le $q$-ième groupe de cohomologie $H^q(M, \mathbf{C})$ est canoniquement isomorphe à l'espace quotient des $q$-courants $d$-fermés sur $M$ par les courants exacts. En particulier, tout courant fermé $T$ de degré $q$ définit une classe de cohomologie de de Rham dans $H^q(M, \mathbf{C})$. La cohomologie à supports compacts $H^q_c(M, \mathbf{C})$ se calcule de même comme le $q$-ième groupe de cohomologie du complexe

$$\ldots \to \mathcal{D}^q(M) \to \ldots \to \mathcal{D}^{q+1}(M) \to \ldots$$

des formes lisses à support compact, et la dualité de Poincaré

$$H^{m-q}(M, \mathbf{C}) = H^q_c(M, \mathbf{C})^\star$$

est induite par la dualité $\mathcal{D}'^{m-q}(M) = \mathcal{D}^q(M)^\star$ qui définit les courants.

### 1.1.2 Courants positifs fermés

Soit maintenant $X$ une variété complexe de dimension (complexe) $n$, munie de son orientation canonique. La décomposition en bidegrés $(p, q)$ au niveau des formes à valeurs complexes en induit dualement une au niveau des courants, et l'on notera $\mathcal{D}'^{p,q}(X)$ (resp. $\mathcal{D}'_{p,q}(X)$) l'espace des courants de bidegré (resp. bidimension) $(p, q)$. Les opérateurs différentiels du premier ordre $\partial$ et $\overline{\partial}$ sont bien définis au niveau des courants. Mais la différence cruciale avec le cas réel est l'existence d'une notion de positivité au niveau des formes et des courants, que nous rappelons brièvement :
si $V$ est un espace vectoriel complexe de dimension $n$, $V$ est muni d'une orientation canonique, définie par la forme volume

$$(idz_1 \wedge d\overline{z}_1) \wedge \ldots \wedge (idz_n \wedge d\overline{z}_n)$$

pour tout choix de coordonnées linéaires $z_1, ..., z_n$ sur $V$, et une forme de degré maximal sur $V$ est dite positive ssi c'est une multiple positif de la forme d'orientation. Une forme de bidegré $(p,p)$ est à son tour dite positive ssi sa restriction à tout $p$-plan complexe de $V$ est positive. L'ensemble des $(p,p)$-formes positives de $V$ forme alors un cône convexe saillant fermé de $\wedge^{p,p}V^\star$, et les éléments du cône dual dans $\wedge^{n-p,n-p}V^\star$ (via la dualité induite par le wedge produit) sont dits fortement positifs. On vérifie que le cône des $(q,q)$-formes fortement positives est engendré par les formes du type

$$(i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1}) \wedge ... \wedge (i\alpha_q \wedge \overline{\alpha_q})$$

où les $\alpha_j$ décrivent $V^\star$. Par définition, une $(1,1)$-forme $\alpha = i \sum \alpha_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ est positive ssi la matrice $(\alpha_{jk})$ est hermitienne positive ; comme une telle matrice est diagonalisable à valeurs propres positives, on voit que la $(1,1)$-forme $\alpha$ est positive ssi elle fortement positive. Par dualité, les deux notions de positivité coincident aussi pour les $(n-1,n-1)$-formes. Ce n'est par contre jamais le cas en bidegré intermédiaire ; en fait, la $(p,p)$-forme $i^{p^2}\alpha \wedge \overline{\alpha}$ est positive pour toute $(p,0)$-forme $\alpha$, mais elle n'est fortement positive que si $\alpha$ est décomposable, i.e. un produit de 1-formes. En prenant maintenant pour $V$ chacun des espaces tangents à la variété $X$, on définit les concepts de positivité faible et forte d'une $(p,p)$-forme, et donc dualement pour les courants. Notons que comme nous considérerons presque toujours des courants et formes de bidegré $(1,1)$ et $(n-1,n-1)$ par la suite, il ne sera pas nécessaire de se soucier de la différence entre les deux notions de positivité.

**Courants d'intégration**

Si $A \subset X$ est un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure $p$, on peut définir un courant d'intégration $[A]$ de bidimension $(p,p)$ même si $A$ est singulier, en intégrant sur les points lisses de $A$ :

$$\int_X [A] \wedge u := \int_{A_{reg}} u.$$

Dire que ceci définit une forme linéaire *continue* sur $\mathcal{D}^{p,p}(X)$ revient à dire que le courant $[A_{reg}]$, bien défini sur $X - A_{sing}$, est de masse localement finie près du lieu singulier de $A$, ce qui se vérifie en projetant de façon adéquate $A$ comme revêtement ramifié au dessus d'ouverts de $\mathbf{C}^p$. On obtient de la sorte un courant $[A]$ fortement positif de bidimension $(p,p)$, fermé sur $X - A_{sing}$, et un théorème de Skoda et El Mir (cf. [ElM84])affirme que $[A]$ est automatiquement fermé sur $X$ tout entier. Si $A = \cup_{l \geq 1} A_l$ est la décomposition de $A$ en composantes irréductibles, sa partie régulière est l'union disjointe de celles de chacun des $A_j$, de sorte que l'on a $[A] = \sum_{l \geq 1} [A_l]$, où la somme est localement finie.

On peut ainsi associer à tout cycle analytique un courant positif fermé de même dimension, et les courants positifs fermés de bidimension $(p,p)$ plus généraux se comportent à bien des égards comme des cycles analytiques de dimension $p$. Ceux-ci peuvent se caractériser parmi les courants positifs fermés en regardant leur support : si $T$ est un courant positif fermé de bidimension $(p,p)$, $T$ est nul si son support est contenu dans un ensemble analytique de dimension $< p$ ; si son support est contenu dans un ensemble analytique $A$ de dimension $p$, alors on a $T = \sum \lambda_l [A_l]$, où les $\lambda_l$ sont des coefficients positifs et les $A_l$ sont les composantes irréductibles de dimension $p$ de $A$. Ces propriétés restent vraies si $T$ est un courant fermé d'ordre 0, i.e. à coefficients mesures.

**Fonctions plurisousharmoniques**

Les courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$, qui généralisent les diviseurs effectifs, sont étroitement liés aux fonctions plurisousharmoniques (psh en abrégé). Rappelons qu'une fonction semi-continue supérieurement $\varphi : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{C}^n$ est dite psh ssi sa restriction à toute droite affine est sousharmonique, i.e. vérifie l'inégalité de la moyenne. Une telle fonction est localement intégrable si elle n'est pas identiquement $-\infty$ sur chaque composante de $\Omega$, donc définit une distribution, et l'on montre par régularisation que le $(1,1)$-courant $i\partial\overline{\partial}\varphi$ est positif si $\varphi$ est psh. Réciproquement, une distribution $\varphi$ telle que $i\partial\overline{\partial}\varphi$ soit positif est associée à une unique fonction psh. En utilisant cette caractérisation, il est facile de voir que le tiré en arrière d'une fonction psh par une application holomorphe est encore psh. En particulier, la notion de fonction psh s'étend aux variétés complexes. Si $T$ est un $(1,1)$-courant positif fermé sur une variété complexe $X$, $T$ s'écrit localement (par exemple, sur toute boule contenue dans un ouvert de carte) sous la forme $i\partial\overline{\partial}\varphi$ pour une certaine distribution $\varphi$, qui correspond donc à une fonction psh d'après ce qu'on vient de voir. On dit que $\varphi$ est un potentiel local du courant $T$.

La notion de potentiel local d'un $(1,1)$-courant positif fermé généralise celle d'équation locale d'un diviseur effectif. En effet, si $f$ est une fonction holomorphe sur (un ouvert de) $X$, la fonction $\log|f|$ est le tiré en arrière par $f$ de la fonction (pluri)sousharmonique $\log|z|$ definie sur $\mathbf{C}$, donc est une fonction psh sur $X$. La formule de Lelong-Poincaré

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [Z_f]$$

(où $Z_f$ désigne le dviviseue des zéros de $f$) énonce que, à une constante près, $\log|f|$ est un potentiel local pour le courant d'intégration $[D]$ d'un diviseur effectif $D$ si $f = 0$ en est une équation locale. On posera dorénavant $dd^c := \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$ pour alléger.

Afin d'illustrer le principe précédent, considérons $u : X \to Y$ une application holomorphe. Si $D$ est un diviseur effectif sur $Y$ d'équation locale $f = 0$ en un point de $Y$, et si l'image de $u$ n'est pas contenue dans (le support de) $D$, alors $f \circ u$ est holomorphe sur un ouvert de $X$ et n'est pas identiquement nulle. Son diviseur des zéros est noté $u^\star D$, le tiré en arrière de $D$ ; il ne dépend pas du choix de $f$. De la même manière, si $T$ est $(1,1)$-courant positif fermé sur $Y$ qu'on a écrit $T = dd^c\varphi$ près d'un point de $Y$, le tiré en arrière $\varphi \circ u$ est psh sur un ouvert de $X$. Si cette fonction n'est pas identiquement $-\infty$, son Hessien complexe $dd^c\varphi \circ u$ ne dépend pas du choix de $\varphi$ et définit un $(1,1)$-courant positif fermé sur $X$, noté $u^\star T$. On peut donc tirer en arrière un $(1,1)$-courant positif fermé par une application holomorphe surjective ; ce n'est plus le cas quand le bidegré de $T$ dépasse 1.

### 1.1.3 Produits de courants et nombres de Lelong

La multiplicité d'un ensemble analytique $A \subset X$ de dimension pure $p$ en un point $x \in X$ peut se définir comme suit : la projection du germe $(A, x) \subset (X, x)$ sur un $p$-plan générique de $(X, x) = (\mathbf{C}^n, x)$ est un revêtement fini ramifié pour un choix générique de coordonnées, et la multiplicité de $A$ en $x$ est le degré minimal possible d'un tel revêtement. Dit autrement, on regarde l'intersection comptée avec multiplicités de $A$ avec un $(n-p)$-plan générique passant par $x$, pour un choix donné de coordonnées en $x$. En théorie des courants, l'analogue de l'intersection de deux cycles analytiques est le produit extérieur des deux courants positifs fermés, et dans un cas comme dans l'autre, l'intersection ou le produit n'est en général pas défini - on ne peut en effet multiplier deux distributions en général. Toutefois, on doit à J.-P.Demailly le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1 (Dem92)** *Soit $T$ un courant positif fermé de bidimension $(p, p)$ et $\varphi$ une fonction psh localement bornée en dehors d'un ensemble analytique de dimension $< p$. On peut alors définir un courant produit*

$$dd^c\varphi \wedge T.$$

*Le produit en question est un courant positif fermé de bidimension $(p-1, p-1)$, et il est continu en $\varphi$ le long des suites décroissantes.*

On définit alors la multiplicité, ou nombre de Lelong, d'un courant positif fermé de bidimension $(p, p)$ en remplaçant l'intersection avec un $(n-p)$-plan générique par le produit extérieur avec $(dd^c \log |z - x|)^p$. On a noté $|z|$ la norme hermitienne de $z$ ; $\log |z - x|$ est donc psh et localement bornée en dehors de $x$, de sorte que la mesure positive $T \wedge (dd^c \log |z - x|)^p$ est bien définie d'après ce qui précède. Le nombre de Lelong $\nu(T, x)$ de $T$ en $x$ est alors défini comme la masse portée par cette mesure au point $x$.

On montre que cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées $z$ en $x$, et que le nombre de Lelong $\nu([A], x)$ du courant d'intégration $[A]$ sur un ensemble analytique $A$ est bien égal à la multiplicité de $A$ en $x$. Lorsque $p = 1$, le nombre de Lelong d'un $(1, 1)$-courant positif fermé $T$ s'interprète au niveau de son potentiel local $\varphi$ tel que $T = dd^c\varphi$ près de $x$ : on peut montrer que $\nu(T, x)$ est le plus grand réel positif $\gamma \geq 0$ tel que $\varphi \leq \gamma \log|z| + O(1)$ près de $x$. On peut donc aussi parler des nombres de Lelong d'une fonction psh. En particulier, si $T = [D]$ est le courant d'intégration sur un diviseur effectif $D$ d'équation locale $f = 0$ près de $x$, on retrouve facilement en appliquant cette caractérisation au potentiel local $\log|f|$ de $T$ que $\nu(T, x)$ est l'ordre d'annulation de $f$ en $x$, i.e. la multiplicité de $D$ en ce point.

Bien que le nombre de Lelong d'un courant $T$ en $x$ mesure la singularité de $T$ en $x$, il ne faut pas croire que $T$ est lisse ou même à potentiel borné lorsque ses nombres de Lelong sont tous nuls. En effet, si $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe croissante quelconque, $\chi(\log|z|)$ définit une fonction psh sur $\mathbf{C}$ avec un pôle à l'origine dès que $\chi(-\infty) = -\infty$, et l'on vérifie facilement que son nombre de Lelong en 0 est $\chi'(-\infty)$, limite des dérivées à droite $\chi'(t)$ lorsque $t \to -\infty$. Or $\chi'(-\infty)$ peut fort bien être nul sans que $\chi(-\infty)$ le soit, par exemple avec $\chi(t) = -\log(-t)$ au voisinage de $-\infty$.

En fait, les nombres de Lelong d'un courant en mesurent les singularités de type analytique. Soit $T$ un courant positif fermé de bidimension $(p, p)$. Pour chaque $c > 0$, on pose

$$E_c(T) := \{x \in X, \nu(T, x) \geq c\}.$$

Un résultat fondamental dû à Y.T.Siu [Siu74] affirme alors que $E_c(T)$ est un sous-ensemble analytique fermé de $X$, de dimension au plus $p$. En prenant pour $c$ une suite de rationnels $> 0$ qui converge vers 0, on déduit de ce résultat que

$$E_+(T) := \cup_{c>0} E_c(T)$$

est une réunion au plus dénombrable d'ensemble analytiques de dimension au plus $p$. Mieux, $T$ contient la partie $p$-dimensionnelle de $E_+(T)$, comptée avec multiplicités. Plus précisément, on introduit d'abord le nombre de Lelong générique de $T$ le long d'un ensemble analytique irréductible $A$ en posant $\nu(T, A) := \inf_{x \in A} \nu(T, x)$, de sorte que $A$ est contenu dans $E_+(T)$ ssi $\nu(T, A) > 0$. Par ce qui précède, on a $\nu(T, A) = \nu(T, x)$ pour $x \in A$ très général. On peut alors montrer que $T - \nu(T, A)[A]$ est encore un courant positif fermé si $A$ est irréductible, de dimension $p$. En appliquant ceci à tous les ensembles analytiques irréductibles de dimension $p$ contenus dans $E_+(T)$, qui forment une famille au plus dénombrable, on obtient que la série $\sum \nu(T,A)[A]$ de courants positifs fermés, où $A$ décrit tous les sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension $p$, est convergente, et que l'on a

$$T = R + \sum \nu(T,A)[A],$$

où $R$ est un courant positif fermé de bidimension $(p,p)$ qui ne contient plus d'ensemble analytique irréductible de dimension $p$. Cette décomposition est appelée décomposition de Siu du courant $T$, et $R$ sa partie résiduelle.

### 1.1.4 Singularités des $(1,1)$-courants

On désigne encore par $X$ une variété complexe de dimension $n$. Si $T$ est un $(1,1)$-courant fermé sur $X$, il admet localement des potentiels locaux, i.e. des distributions $\varphi$ telles que $T = dd^c\varphi$ localement ; ces potentiels locaux ne sont pas uniquement déterminés par $T$, mais la différence $\psi$ de deux tels potentiels locaux sur leur ensemble de définition commun vérifie $dd^c\psi = 0$, i.e. est pluriharmonique, donc lisse en particulier. On peut donc classifier les singularités de $T$ modulo $C^\infty$ en regardant ses potentiels locaux. Nous serons amenés par la suite à approcher un $(1,1)$-courant positif fermé par des courants fermés qui lui sont cohomologues et à singularités plus raisonnables, à savoir lisses ou à singularités analytiques ; ceci ne peut se faire qu'au prix d'une perte de positivité, qui nous amène à la définition suivante :

**Définition 1.1.2** *On dit qu'un $(1,1)$-courant fermé $T$ est presque positif ssi sa partie négative est localement bornée, i.e. ssi près de tout point de $x \in X$ on peut trouver une $(1,1)$-forme réelle bornée $\gamma$ telle que $T \geq \gamma$.*

Quitte à se rapprocher de $x$, on peut supposer que des coordonnées locales $z$ sont données et que $\gamma \geq -Ci\partial\overline{\partial}|z|^2$ pour un certain $C > 0$. Mais alors $T + Ci\partial\overline{\partial}|z|^2$ est positif et fermé, donc s'écrit $i\partial\overline{\partial}\varphi$ pour $\varphi$ psh. Au final, $T$ s'écrit localement $i\partial\overline{\partial}\psi$ où $\psi$ est la somme d'une fonction psh et d'une fonction lisse. Une telle fonction est dite presque psh.

Il est clair qu'on peut encore parler des nombres de Lelong d'un courant presque positif en regardant sa partie positive, qui existe localement. Le théorème de Siu et la décomposition qui en résulte restent valables, mais la partie residuelle $R$ est bien sûr seulement presque positive ; plus précisément, on aura $R \geq \gamma$ si $T \geq \gamma$. Par ailleurs, un $(1,1)$-courant presque positif peut aussi être tiré en arrière par un morphisme surjectif.

**Définition 1.1.3** *(i) Si $T$ est $(1,1)$-courant fermé et $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent d'idéaux, on dit que $T$ est de type $\mathcal{I}$ ssi ses potentiels locaux sont congrus à des fonctions du type*

$$\frac{1}{2}\log(|f_1|^2 + \ldots + |f_p|^2),$$

*modulo $C^\infty$, où $f_1, ..., f_p$ est un système local de générateurs de $\mathcal{I}$.*

*(ii) Un $(1,1)$-courant fermé $T$ est de type analytique ssi il existe un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ tel que $T$ soit de type $\mathcal{I}$.*

*(iii) Un $(1,1)$-courant fermé $T$ est à singularités analytiques (resp. algébriques) ssi il existe un réel (resp. un rationnel) $c \geq 0$ tel que $cT$ soit de type analytique.*

Rappelons que tout faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ admet une clotûre intégrale $\overline{\mathcal{I}}$, définie comme le faisceau d'idéaux formé des germes $g$ de fonctions holomorphes satisfaisant une équation $g^d + a_1 g^{d-1} + ... + a_d = 0$, où $a_k$ est un élement de $\mathcal{I}^k$. Un tel germe $g$ vérifie $|g| = O(|f_1| + ... + |f_p|)$ pour tout système local $(f_1, ..., f_p)$ de générateurs de $\mathcal{I}$, et l'on peut montrer que la réciproque est vraie, et que $\overline{\mathcal{I}}$ est un faisceau cohérent. Cela étant, on a la

**Proposition 1.1.4** *Il existe une bijection entre les faisceaux cohérents d'idéaux intégralement clos et les classes modulo $C^\infty$ de $(1,1)$-courants de type analytique.*

**Démonstration** : si $T$ est de type $\mathcal{I}$, il est presque positif, de sorte que chacun de ses potentiels locaux $\varphi$ est une fonction presque psh. Le faisceau des germes de fonctions holomorphes $g$ vérifiant $|g| = O(e^\varphi)$ est alors égal à la clotûre intégrale de $\mathcal{I}$ d'après ce qui précède ; on a ainsi associé à $T$ un idéal intégralement clos, qui ne dépend que de la classe de $T$ modulo $C^\infty$. Réciproquement, étant donné un idéal cohérent $\mathcal{I}$, on va construire un courant $T$ de type $\mathcal{I}$ de la façon suivante : on choisit un recouvrement ouvert localement fini $U_j$ de $X$ tel que $\mathcal{I}$ soit engendré par $f^{(j)} = (f_1^{(j)}, ..., f_{N_j}^{(j)})$ sur $V_j \supset\supset U_j$, et on se donne une partition de l'unité $\theta_j$ associée à $U_j$. On définit alors

$$T := dd^c(\frac{1}{2}\log(\sum_j \theta_j |f^{(j)}|^2)).$$

Sur $U_j \cap U_k$, il existe $C_{jk} > 0$ tel que $C_{jk}^{-1}|f^{(j)}|^2 \leq |f^{(i)}|^2 \leq C_{jk}|f^{(j)}|^2$, et l'on voit ainsi facilement que $T$ est de type $\mathcal{I}$. Il est clair que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre, qed.

La partie divisorielle d'un courant $T$ de type $\mathcal{I}$ dans sa décomposition de Siu est exactement la partie divisorielle $D$ du schéma $V(\mathcal{I})$ ; en effet, il suffit de le vérifier pour $T = dd^c\frac{1}{2}\log(|f_1|^2 + ... + |f_N|^2)$, où les $f_j$ engendrent $\mathcal{I}$. Si $g$ désigne un p.g.c.d. des $f_j$, on obtient

$$T = dd^c \log|g| + dd^c \frac{1}{2}\log(|h_1|^2 + ... + |h_N|^2),$$

où les $h_j := f_j/g$ ont des zéros communs en codimension au moins deux. Comme on a $dd^c \log|g| = [D]$ par la formule de Lelong-Poincaré, l'assertion est claire. Plus généralement, si $V(\mathcal{I})$ est de codimension $\geq p$, le $(p,p)$-courant $T^p$ est bien défini d'après le théorème 1.1.1, et la formule de King [Kin70] affirme que le $p$-cycle qui apparaît dans la décomposition de Siu de $T^p$ est exactement le $p$-cycle associé au schéma $V(\mathcal{I})$.

L'avantage des singularités analytiques est qu'elles peuvent être résolues par éclatements.

**Proposition 1.1.5** *Soit $T$ un $(1,1)$-courant fermé de type $\mathcal{I}$ sur $X$. Alors il existe une modification propre $\mu : \widetilde{X} \to X$ qui est une suite localement finie d'éclatements de centre lisse telle que la partie résiduelle de $\mu^\star T$ soit lisse.*

Il est en effet clair que $\mu^\star T$ est de type $\mu^\star\mathcal{I}$ pour tout morphisme surjectif $\mu : \widetilde{X} \to X$ ; d'après Hironaka, on peut choisir une modification $\mu$ comme dans l'énoncé telle que $\mu^\star\mathcal{I}$ soit de la forme $\mathcal{O}(-D)$ pour un diviseur effectif $D$ sur $\widetilde{X}$, et le résultat découle de la discussion ci-dessus.

**Comparaison des singularités**

Si l'on s'intéresse plus grossièrement aux singularités des fonctions presque psh modulo $L^\infty$, on peut introduire comme dans [DPS01] une comparaison des singularités de deux fonctions :

**Définition 1.1.6** *Soit $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions presque psh sur $X$. On dit que $\varphi_1$ est moins singulière que $\varphi_2$ en $x \in X$ si*

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 + O(1)$$

*au voisinage de $x$. On note $\varphi_1 \preceq \varphi_2$ le fait que $\varphi_1$ soit moins singulière que $\varphi_2$ en tout point.*

Attention au changement de direction dans les inégalités ! On dira que $\varphi$ est non-singulière en $x$ ssi $\varphi$ est localement bornée près de $x$, et l'on note $\mathrm{Sing}(\varphi)$ son lieu singulier, i.e. l'ensemble des $x \in X$ tels que $\varphi$ soit singulière en $x$. En particulier, on dira que $\varphi$ a une singularité isolée en $x$ ssi $x$ est isolé dans $\mathrm{Sing}(\varphi)$. Il faut remarquer qu'avec cette définition, $\mathrm{Sing}(\varphi)$ est un fermé qui contient l'adhérence de l'ensemble polaire $\varphi^{-1}(-\infty)$, mais l'inclusion peut être stricte.

La caractérisation des nombres de Lelong d'une fonction presque psh $\varphi$ peut se reformuler en disant que $\nu(\varphi,x)$ est le plus grand $\gamma \geq 0$ tel que $\gamma \log|z-x|$ soit moins singulière que $\varphi$ près de $x$. En particulier, on a $\nu(\varphi_1,x) \leq \nu(\varphi_2,x)$ dès que $\varphi_1$ est moins singulière que $\varphi_2$ en $x$. On peut donner une interprétation similaire des nombres de Lelong génériques :

**Proposition 1.1.7** *Soit $\varphi$ une fonction presque psh sur $X$ et $A$ un sous-ensemble analytique de $X$. Soit $\psi_A$ une fonction presque psh de type $\mathcal{I}_A$. Alors le nombre de Lelong générique $\nu(\varphi, A)$ de $\varphi$ le long de $A$ est le plus grand $\gamma \geq 0$ tel que $\gamma\psi_A$ soit moins singulière que $\varphi$ au point générique de $A$.*

**Preuve** : soit $\gamma \geq 0$ tel que $\gamma\psi_A$ soit moins singulière que $\varphi$ au point générique de $A$. On a alors $\nu(\varphi, x) \geq \gamma\nu(\psi_A, x)$ pour $x \in A$ générique. Au point très général $x$ de $A$, on a $\nu(\varphi, x) = \nu(\varphi, A)$ et $\nu(\psi_A, x) = 1$, de sorte que $\gamma \leq \nu(\varphi, A)$. En particulier, le supremum $\lambda$ des $\gamma \geq 0$ considérés est fini, et $\lambda \leq \nu(\varphi, A)$. Pour obtenir l'inégalité en sens inverse, il faut voir que $\nu(\varphi, A)\psi_A$ est moins singulière que $\varphi$ au point générique de $A$. On va voir que c'est en fait le cas en tout point lisse $x$ de $A$. Soit donc $x$ un tel point ; on choisit un voisinage de $x$ isomorphe à un polydisque $\Delta^n$ dans $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{n-p}$ muni des coordonnées $z = (z', z'')$ telles que $A = \{z' = 0\}$ près de $x = 0$. $\psi_A$ est alors égale à $\log|z'|$ modulo $C^\infty$ près de 0. On pose

$$\varphi'(z') := \sup_{|z''| \leq r''} \varphi(z', z''),$$

pour $0 < r'' < 1$ fixé ; $\varphi'$ est alors une fonction psh au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^p$. Pour chaque $z''$ tel que $|z''| \leq r''$, le nombre de Lelong à l'origine de $z' \mapsto \varphi(z', z'')$ est au moins égal à celui de $\varphi$ en $(0, z'')$, qui est au moins $\nu(\varphi, A)$ puisque $(0, z'')$ appartient à $A$. On en déduit que le nombre de Lelong de $\varphi'$ en l'origine est au moins égal à $\nu(\varphi, A)$, ce qui signifie que l'on a

$$\varphi(z', z'') \leq \nu(\varphi, A) \log|z'| + O(1)$$

pour tout $|z'|$ assez petit, uniformément en $z''$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Comme application de ce résultat, on obtient le

**Corollaire 1.1.8** *Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de $X$ le long d'une sous-variété (lisse) $Y$, et soit $E$ le diviseur exceptionnel. Alors, pour tout $(1,1)$-courant presque positif fermé $T$ sur $X$, on a*

$$\nu(T, Y) = \nu(\pi^\star T, E).$$

**Preuve** : soit $\varphi$ une fonction presque psh sur $X$ telle que $T - dd^c\varphi$ soit lisse, de sorte que $\nu(T, x) = \nu(\varphi, x)$ en tout point. Soit aussi $\psi_Y$ une fonction presque psh de type $\mathcal{I}_Y$ sur $X$. Il est immédiat de vérifier que $\psi_Y \circ \pi$ est de type $\mathcal{I}_E$ sur $\widetilde{X}$. Comme de plus $\varphi$ est plus singulière que $\psi_Y$ au point générique de $Y$ ssi $\varphi \circ \pi$ est plus singulière que $\psi_Y \circ \pi$ au point générique de $E$, le corollaire découle immédiatement de la proposition 1.1.7.

## 1.2 Cônes positifs en cohomologie

### 1.2.1 Cohomologie de Bott-Chern

Si $X$ est variété complexe et $p$ et $q$ sont deux entiers positifs, on définit le groupe de cohomologie de Bott-Chern $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C})$ comme l'espace vectoriel topologique quotient de l'espace de Fréchet des formes lisses fermées de bidegré $(p,q)$ par celles qui sont exactes. Considérons le complexe de faisceaux suivant :

$$\mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{dd^c} \mathcal{E}^{1,1} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{2,1} \oplus \mathcal{E}^{1,2} \xrightarrow{d} \ldots$$

Comme nous l'avons vu, cette suite de faisceaux doux est exacte, et le noyau de la première flèche est le faisceau des fonctions pluriharmoniques (complexes) $\mathcal{H}$. D'après le théorème de de Rham-Weil, $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{C})$ est donc isomorphe à $H^1(X, \mathcal{H})$. On a de même une résolution de $\mathcal{H}$ en utilisant les courants :

$$\mathcal{D}'^{0,0} \xrightarrow{dd^c} \mathcal{D}'^{1,1} \xrightarrow{d} \mathcal{D}'^{2,1} \oplus \mathcal{D}'^{1,2} \xrightarrow{d} \ldots;$$

de sorte que $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{C}) = H^1(X, \mathcal{H})$ peut aussi se calculer en utilisant les courants. Ceci reste valable pour les autres groupes $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C})$, et se montre en utilisant la version adéquate des suites ci-dessus. En particulier, tout courant fermé $T$ de bidegré $(p,q)$ définit une classe dans $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C})$ que l'on notera $\{T\}$.
Comme tout germe de fonction pluriharmonique réelle est la partie réelle d'une fonction holomorphe, on a $\mathcal{H} = \mathcal{O} + \overline{\mathcal{O}}$, et la suite exacte

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{O} \oplus \overline{\mathcal{O}} \to \mathcal{H} \to 0$$

montre que $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{C}) = H^1(X, \mathcal{H})$ est de dimension finie lorsque $X$ est compacte. A nouveau, ce fait reste valable pour tous les $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C})$. Dans ce cas, l'opérateur $\partial\overline{\partial}$ entre l'espace de Fréchet des $(p-1, q-1)$-formes lisses et l'espace de Fréchet des $(p,q)$-formes fermées lisses a une image de codimension finie, donc fermée. En particulier, on en déduit que la topologie quotient sur $H^{p,q}(X, \mathbf{C})$ coincide avec son unique topologie d'espace vectoriel topologique séparé de dimension finie.
Notons aussi que $H^{p,p}_{BC}(X, \mathbf{C})$ est muni d'une structure réelle induite par celle de l'espace des $(p,p)$-formes, car $d$ et $i\partial\overline{\partial}$ sont des opérateurs réels. On notera $H^{p,p}_{BC}(X, \mathbf{R})$ l'espace des points réels de $H^{p,p}_{BC}(X, \mathbf{C})$.
Lorsque $X$ est une variété kählerienne compacte, $X$ admet une décomposition de Hodge forte au sens où les morphismes canoniques

$$H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C}) \to H^{p,q}(X, \mathbf{C})$$

et

$$\oplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X, \mathbf{C}) \to H^k(X, \mathbf{C})$$

sont des isomorphismes. Ce fait reste valable lorsque $X$ est une variété de Fujiki, i.e. quand il existe une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ avec $\widetilde{X}$ kählerienne.

### 1.2.2 Groupe de Néron-Séveri

Si $X$ une variété complexe, on note $Pic(X) := H^1(X, \mathcal{O}^\star_X)$ le groupe de Picard de $X$, formé des classes d'isomorphisme de fibrés en droites ; nous utiliserons la notation additive $L + M := L \otimes M$ pour sa loi de composition. Si $L \in Pic(X)$ est un fibré en droites sur $X$, on peut le munir d'une métrique hermitienne lisse $h_\infty$ ; dans chaque trivialisation $L_{|U} = U \times \mathbf{C}$, on peut écrire $h_\infty(x, v) = |v|^2 e^{-2\varphi_\infty(x)}$ avec $\varphi_\infty$ lisse, et on définit la forme de courbure de $h_\infty$ comme étant la $(1,1)$-forme $\Theta_\infty(L)$ égale à $dd^c\varphi_\infty$ sur $U$.

Une métrique hermitienne singulière sur $L$ s'écrit par définition $h = h_\infty e^{-2\psi}$ pour une fonction $L^1_{loc}$ $\psi$ (le poids de $h$), et le courant de courbure de $h$ est par définition $\Theta_h(L) := \Theta_\infty(L) + dd^c\psi$. Il en résulte en particulier que la classe de cohomologie de $\Theta_h(L)$ dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ ne dépend pas du choix de $h$ ; on la note $c_1(L)$, la première classe de Chern de $L$.

Pour tout $(1,1)$-courant fermé $T$ dans $c_1(L)$, il existe une distribution $\psi$ telle que $T = \Theta_\infty(L) + dd^c\psi$ ; lorsque $T$ est de plus presque positif, $\psi$ est une fonction presque psh, donc en particulier $L^1_{loc}$, et $h := h_\infty e^{-2\psi}$ définit une métrique hermitienne singulière sur $L$ de courant de courbure égal à $T$. Il y donc une correspondance entre les métriques singulières à poids presque psh sur $L$ et les courants presque positifs dans $c_1(L)$.

**Définition 1.2.1** *Le groupe de Néron-Severi $NS(X)$ de $X$ est l'image du morphisme $Pic(X) \to H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ $L \mapsto c_1(L)$.*

On notera aussi $NS(X)_\mathbf{Q} := NS(X) \otimes \mathbf{Q} \subset H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ et $NS(X)_\mathbf{R} := NS(X) \otimes \mathbf{R} \subset H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$. Lorsque $X$ est compacte, $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est de dimension finie, et donc $NS(X)_\mathbf{R}$ aussi. Sa dimension est appelée nombre de Picard de $X$, noté $\rho(X)$.
On peut caractériser le groupe de Néron-Severi par le théorème $(1,1)$ de Lefschetz :

**Proposition 1.2.2** *Une classe $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ appartient à $NS(X)$ ssi l'image de $\alpha$ par le morphisme canonique $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R}) \to H^2(X, \mathbf{R})$ appartient à l'image de $H^2(X, \mathbf{Z})$ dans $H^2(X, \mathbf{R})$.*

**Remarques :**(i) Habituellement, le groupe de Néron-Severi désigne plutôt l'image du morphisme $c_1 : Pic(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ obtenu à partir de la suite exacte exponentielle.

(ii) Il n'est pas clair que $NS(X) \subset H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est un sous-groupe discret en général, comme dans le cas kählerien.

### 1.2.3 Cônes positifs

Soit $X$ une variété complexe compacte et $\omega$ une métrique hermitienne fixée. On introduit des cônes convexes dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ correspondant à différentes notions de positivité pour des classes de cohomologie.

**Définition 1.2.3** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$. On dit que*
*(i) $\alpha$ est une classe kählerienne ssi elle peut être représentée par une forme käheleriennne, i.e. une $(1,1)$-forme fermée lisse définie positive.*
*(ii) $\alpha$ est une classe nef (numériquement effective) ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une $(1,1)$-forme fermée lisse dans $\alpha$ telle que $\theta_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$.*
*(iii) $\alpha$ est une classe grosse ssi elle peut être représentée par un courant kählerien, i.e. un $(1,1)$-courant fermé $T$ tel que $T \geq \varepsilon\omega$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.*
*(iv) $\alpha$ est une classe pseudoeffective ssi elle peut être représentée par un $(1,1)$-courant positif fermé.*

Ces définitions ne dépendent pas du choix de la métrique hermitienne $\omega$, car deux telles formes $\omega$ et $\omega'$ sont commensurables, i.e. il existe $C > 0$ tel que $C^{-1}\omega \leq \omega' \leq C\omega$. L'ensemble des classes kähleriennes est un cône convexe ouvert $\mathcal{K} \subset H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$, le cône kählerien. On définit de même le cône nef $\mathcal{N}$, qui est convexe et fermé, le cône gros $\mathcal{G}$, convexe et ouvert, et enfin le cône pseudoeffectif $\mathcal{E}$, convexe et fermé. La convexité est claire dans chaque cas ; l'ouverture de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$ et le fermeture de $\mathcal{N}$ résultent du fait que $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est muni de la topologie induite par l'espace des $(1,1)$-formes lisses et fermées par passage au quotient. On a de plus les inclusions suivantes :

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{E}$$

et

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{E},$$

qui sont toutes claires en dehors de $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$. Pour obtenir celle-ci ainsi que le caractère fermé de $\mathcal{E}$, on utilise une propriété de compacité faible des courants :

**Proposition 1.2.4** *L'application $T \mapsto \{T\}$ qui à un $(1,1)$-courant fermé associe sa classe de cohomologie dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est propre en restriction à $\{T \geq \gamma\}$ pour toute $(1,1)$-forme réelle bornée $\gamma$.*

**Démonstration** : on utilise le fait qu'il existe sur toute variété complexe compacte une métrique de Gauduchon, i.e. une $(1,1)$-forme $\omega$ définie positive et telle que $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$, où $n = \dim X$ (cf. [Gau77]). Si $T$ est un $(1,1)$-courant fermé avec $T \geq \gamma$, la masse du courant positif $T-\gamma$ est contrôlée par $\int_X (T-\gamma)\wedge\omega^{n-1}$ ; or $\int_X T\wedge\omega^{n-1}$ ne dépend que de la classe $\{T\}$ de $T$ dans $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbf{R})$ puisque $\omega^{n-1}$ est $\partial\overline{\partial}$-fermée. On en déduit que la masse de $T-\gamma$, et donc celle de $T$, est bornée lorsque la classe $\{T\}$ reste dans un compact de $H^{1,1}_{BC}(X,\mathbf{R})$. Le résultat découle donc de la propriété de compacité faible des courants de masse bornée.

Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X,\mathbf{R})$ est nef, la famille de $(1,1)$-formes $\theta_\varepsilon$ dans $\alpha$ telle que $\theta_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$ reste dans un compact d'après la proposition, et on peut en extraire une valeur d'adhérence $T$ dans l'espace des courants, qui est clairement positive et appartient à $\alpha$. Cette dernière est donc bien pseudoeffective. On déduit également de la proposition que le cône pseudoeffectif est à base compacte.
**Remarque** : il est important de noter que l'on ne peut pas en général trouver de $(1,1)$-forme lisse et positive dans une classe nef. L'exemple suivant se trouve dans [DPS94] : soit $E$ une courbe elliptique ; comme $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{O}) = H^1(E,\mathcal{O}) = 1$, il existe une extension non scindée

$$0 \to \mathcal{O} \to V \to \mathcal{O} \to 0,$$

unique à isomorphisme près. Si on a écrit $E = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})$ avec $\Im\tau > 0$, on peut aussi construire $V$ comme le quotient de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^2$ par le groupe ablien libre engendré par les deux automorphismes $g_1(z;v,w) = (z+1;v,w)$ et $g_2(z;v,w) = (z+\tau;v+w,w)$.

On pose alors $X := \mathbf{P}(V)$, le fibré des hyperplans de $V$, et $L := \mathcal{O}_V(1)$. Comme $V$ est une extension de fibrés nef, il est lui-même nef, ce qui signifie que $L$ est un fibré en droites nef sur $X$. Le quotient $V \to \mathcal{O} \to 0$ définit une section $C$ de $X \to E$, qui appartient au système linéaire $|L|$. Le courant d'intégration $[C]$ est donc un courant positif fermé dans $c_1(L)$ et l'on montre dans [DPS94] que c'est le seul. En particulier, la classe nef $c_1(L)$ ne peut pas contenir de forme lisse positive.

### 1.2.4 Stabilité de la positivité sous l'action d'un morphisme.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif entre variétés complexes et compactes. On se propose d'étudier le comportement des différentes notions de positivité sous $f_\star$ et $f^\star$. On commence par la positivité stricte, qui ne se conserve que dans le cas où $f$ est génériquement fini.

**Proposition 1.2.5** *Soit $f : Y \to X$ un morphisme surjectif et génériquement fini. On considère deux classes $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(Y,\mathbf{R})$ et $\beta \in H^{1,1}_{BC}(X,\mathbf{R})$. Alors :*

*(i) $f_\star\alpha$ est grosse si $\alpha$ l'est, mais pas réciproquement.*
*(ii) $f^\star\beta$ est grosse ssi $\beta$ l'est.*
*(iii) Si $f$ est de plus finie, $f^\star\beta$ est kählerienne ssi $\beta$ l'est.*

**Démonstration** : (i) Soit $T \in \alpha$ un courant kählerien, et $\omega_Y$ (resp. $\omega_X$) une métrique hermitienne sur $Y$ (resp. $X$), de sorte qu'on a $T \geq \varepsilon\omega_Y$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Par compacité de $Y$, il existe une constante $C > 0$ telle que $f^\star\omega_X \leq C\omega_Y$. On a alors $f_\star T \geq \varepsilon f_\star\omega_Y \geq (\varepsilon \deg f/C)\omega_X$, donc $f_\star T$ est bien un courant kählerien dans la classe $f_\star\alpha$. Pour un contre-exemple à la réciproque, il suffit de considérer l'éclatement $\pi$ de $\mathbf{P}^2$ en $N = d^2$ points d'une courbe lisse $C \subset \mathbf{P}^2$ de degré $d$. La transformée stricte $\widetilde{C}$ de $C$ vérifie $\widetilde{C}^2 = 0$, donc est nef mais pas grosse, alors que $C = \pi_\star\widetilde{C}$ l'est.

(ii) Si $f^\star\beta$ est grosse, $\beta$ l'est d'après (i). Réciproquement, on suppose que $\beta$ est une classe grosse. D'après le théorème d'applatissement d'Hironaka, il existe une suite d'éclatements de centres lisses $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que l'application induite $Z := \widetilde{X} \times_X Y \to \widetilde{X}$ soit plate, et donc finie. Comme (i) s'applique à $Z \to Y$ (les singularités de $Z$ n'ayant pas d'importance), on est ramené à traiter deux cas : $f$ est un éclatement de centre lisse, ou bien $f$ est finie (mais la source peut être singulière dans ce cas). Le premier cas est traité avec le lemme 1.2.12 ci-après. Pour le second, on utilise le

**Lemme 1.2.6** *Soit $f : Y \to X$ un morphisme fini et plat entre des espaces complexes compacts munis de métriques hermitiennes $\omega_Y$ et $\omega_X$ respectivement. Alors il existe une fonction lisse $\varphi$ sur $Y$ et $\delta > 0$ tels que $f^\star\omega_X + dd^c\varphi \geq \delta\omega_Y$.*

**Démonstration** : on procède par récurrence sur la dimension de $X$. Soit $A \subset X$ le plus petit sous-ensemble analytique contenant $X_{sing}$ tel que $f$ soit étale au dessus de $X - A$. $A$ est de dimension strictement plus petite, donc il existe $\delta > 0$ et une fonction lisse $\psi$ sur $f^{-1}(A)$ tels que $f^\star\omega_X + dd^c\psi \geq \delta\omega_Y$ en restriction à $f^{-1}(A)$. D'après [Pau98], il existe donc un voisinage ouvert $U$ de $f^{-1}(A)$ dans $Y$ et une fonction lisse $\widetilde{\psi}$ sur $Y$ tels que $f^\star\omega_X + dd^c\widetilde{\psi} \geq (\delta/2)\omega_Y$ sur $U$. Comme $f$ est étale au dessus de l'ouvert lisse $X - A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^\star\omega_X + \varepsilon(f^\star\omega_X + dd^c\widetilde{\psi})$ soit définie positive sur le compact $X - U$. Elle est aussi définie positive sur $U$ puisque $f^\star\omega_X$ est semi-positive partout et $f^\star\omega_X + dd^c\widetilde{\psi}$ est strictement positive sur $U$ par construction. On en déduit le résultat en posant $\varphi := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\widetilde{\psi}$.
On finit la preuve de (ii) : si $T \geq \varepsilon\omega_X$ est un courant kählerien dans $\beta$ sur $X$, on déduit du lemme que $f^\star T + \delta dd^c\varphi$ est un courant kählerien dans $f^\star\beta$, qui est donc grosse.

(iii) Si $\beta$ est une classe kählerienne et $f$ est finie, $f^\star\beta$ est aussi kählerienne d'après le lemme 1.2.6. Réciproquement, supposons que $f^\star\beta$ soit une classe kählerienne, et soit $\theta$ un représentant lisse de $\beta$. Alors il existe une fonction

lisse $\varphi$ sur $Y$ telle que $f^\star\theta + dd^c\varphi$ soit une forme kählerienne, qui est donc *a fortiori* plus grande que $\varepsilon f^\star\omega_X$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Si l'on pose $\psi(x) = \max_{y\in f^{-1}(x)}\varphi(y)$, alors $\psi$ est une fonction continue sur $X$ (puisque $f$ est propre et $\varphi$ est continue), qui vérifie $T := \theta + dd^c\psi \geq \varepsilon\omega_X$. $T$ est donc un courant kählerien dans $\beta$ avec tous ses nombres de Lelong nuls, et il résulte du théorème 1.2.9 que $\beta$ est une classe kählerienne.
On passe maintenant à la semi-positivité :

**Proposition 1.2.7** *Soit $f : Y \to X$ un morphisme surjectif entre variétés complexes compactes et $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$. Alors on a :*
*(i) $f^\star\alpha$ est nef ssi $\alpha$ l'est.*
*(ii) $f^\star\alpha$ est pseudoeffective ssi $\alpha$ l'est. Lorsque $f$ est de plus connexe, chaque courant positif fermé $T$ dans $f^\star\alpha$ s'écrit $T = f^\star S$ pour un unique courant positif $S \in \alpha$.*

**Démonstration** : le point (i) est le résultat principal de [Pau98]. Le point (ii) est beaucoup plus simple à démontrer : fixons un représentant lisse $\theta$ de $\alpha$, et soit $T$ un courant positif dans $f^\star\alpha$. On peut écrire $T = f^\star\theta + dd^c\varphi$, où $\varphi$ est une fonction presque psh sur $Y$. Soit $C \subset X$ l'ensemble des valeurs critiques de $f$, et posons

$$\psi(x) := \sup_{y\in f^{-1}(x)} \varphi(y)$$

pour $x$ dans $X - C$. Je dis que $\psi$ admet un unique prolongement presque psh à $X$ tel que $S := \theta + dd^c\psi \geq 0$. Si $U$ est un petit ouvert de $X$ sur lequel $\theta = dd^c u$, $u \circ f + \varphi$ est psh sur $f^{-1}(U)$, et la restriction de $f$ définit une submersion propre $f^{-1}(U - C) \to U - C$, donc $\psi(y) + u(y) = \sup_{x\in f^{-1}(y)}(u\circ f)(x) + \varphi(x)$ est une fonction psh sur $U - C$ localement majorée près de $C$ car $\varphi$ est majorée localement au dessus de $Y$ ; $u + \psi$ admet donc un unique prolongement psh à $U$ tout entier, et notre assertion est vérifiée. Ceci montre déjà le premier point de (ii). Si on suppose maintenant $f$ connexe, la fonction psh $u\circ f + \varphi$ sur $f^{-1}(U)$ a une restriction psh (éventuellement identiquement $-\infty$) à chacune des fibres $f^{-1}(x)$ pour $x \in U - C$. Ces fibres sont des variétés compactes connexes, donc la restriction en question est constante, et l'on voit que $\varphi$ est constante sur chacune de ces fibres. Il en découle que les deux fonctions psh $u \circ f + \varphi$ et $u \circ f + \psi \circ f$ coincident presque partout (à savoir en dehors de l'ensemble analytique $f^{-1}(C)$) sur $f^{-1}(U)$ ; elles y sont donc égales partout, et l'on voit que les deux courants $T = f^\star\theta + dd^c\varphi$ et $f^\star S = f^\star\theta + dd^c(\psi \circ f)$ sont égaux sur $Y$. Pour ce qui est de l'unicité de $S$, on dispose plus généralement du

**Lemme 1.2.8** *Soit $f : Y \to X$ une application surjective et propre entre variétés complexes. Si $T_1$ et $T_2$ sont deux courants presque positifs sur $X$ avec $f^\star T_1 = f^\star T_2$, on a $T_1 = T_2$.*

**Démonstration** : l'assertion est locale sur $X$, donc on peut supposer que $T_i = dd^c\varphi_i$. Soit $u := \varphi_1 - \varphi_2$ ; l'hypothèse est que $u \circ f$ est pluriharmonique, et l'on veut voir que $u$ l'est aussi. Il suffit donc de voir qu'une fonction $L^1_{loc}$ $v$ est égale presque partout à une fonction psh lorsque $v \circ f$ est psh (on applique ensuite ceci à $v = u$ et $-u$). En dehors de points critiques de $f$, on peut trouver des coordonnées locales sur $Y$ telles que $f(z_1, ...z_n) = (z_1, ..., z_p)$, est l'assertion est claire dans ce cas. On voit donc que $v$ est psh en dehors de l'ensemble analytique $C$ des valeurs critiques de $f$. Comme $v$ est aussi localement majorée près de $C$ (puisque $v \circ f$ est localement majorée partout), $v_{|Y-C}$ admet un unique prolongment psh à $Y$, qui est égal à $v$ sur $X - C$, donc presque partout sur $X$, qed.

### 1.2.5 Régularisation des courants presque positifs

Nous rappelons dans cette section les théorèmes de régularisation des $(1,1)$-courants presque positifs, dûs à J.-P.Demailly.

Soit $X$ une variété complexe compacte. Un courant positif fermé $T$ ne peut en général pas être approché par des formes lisses fermées et positives. Par exemple, le diviseur exceptionnel $E$ de l'éclatement $\widetilde{X}$ d'un point dans une surface lisse $X$ verifie $\int_{\widetilde{X}} \{E\}^2 = -1$ ; si $\theta_k$ est une suite de $(1,1)$-formes lisses, fermées et positives convergeant faiblement vers le courant d'intégration $[E]$, alors leurs classes $\{\theta_k\} \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ convergent vers celle de $\{E\}$. Or $\int_X \{\theta_k\}^2 = \int_X \theta_k^2 \geq 0$, car $\theta_k^2$ est une $(2,2)$-forme positive en tant que produit de $(1,1)$-formes positives lisses. Le prix à payer pour régulariser $T$ est une perte de positivité dans les directions négatives du fibré tangent $T_X$, contrôlée par les nombres de Lelong de $T$. Pour fixer les notations, on note $\pi : \mathbf{P}(T_X) \to X$ la projection canonique du fibré des hyperplans de $T_X$, et l'on suppose donnée une $(1,1)$-forme réelle fermée lisse $u$ sur $X$ telle que $c_1(\mathcal{O}_{T_X}(1)) + \pi^\star\{u\}$ soit nef sur $\mathbf{P}(T_X)$ (par exemple $u = C\omega$ avec $C \gg 1$). On a alors le résultat suivant :

**Théorème 1.2.9 (Dem92)** *Soit $T = \theta + dd^c\varphi$ un $(1,1)$-courant fermé presque positif sur une variété complexe compacte $X$, avec $\theta$ lisse et $\varphi$ presque psh. Supposons également donnée une $(1,1)$-forme réelle continue $\gamma$ telle que $T \geq \gamma$, ainsi qu'une métrique hermitienne $\omega$ sur $X$. Alors il existe une suite décroissante de fonctions lisse $\varphi_k$ telle que :*
*(i) $\varphi_k$ converge vers $\varphi$ ponctuellement et dans $L^1_{loc}$, et donc $T_k := \theta + dd^c\varphi_k$ converge faiblement vers $T$.*
*(ii) $T_k \geq \gamma - \lambda_k u - \varepsilon_k\omega$, où $\lambda_k$ est une suite décroissante de fonctions continues convergeant ponctuellement vers $\nu(T, x)$, et $\varepsilon_k > 0$ converge vers $0$.*

Si on est prêt à accepter des courants à singularités analytiques, la perte de positivité peut être rendue arbitrairement petite :

**Théorème 1.2.10 (Dem92)** *Les données étant les mêmes que dans le théorème 1.2.9, il existe une suite décroissante de fonctions $\varphi_k$ à singularités analytiques telles que :*
*(i) $\varphi_k$ converge vers $\varphi$ ponctuellement et dans $L^1_{loc}$, et donc $T_k := \theta + dd^c\varphi_k$ converge faiblement vers $T$.*
*(ii) $T_k \geq -\varepsilon_k\omega$ pour une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant vers $0$.*
*(iii) les nombres de Lelong $\nu(T_k, x)$ convergent vers $\nu(T, x)$, uniformément par rapport à $x \in X$.*

### 1.2.6 Cônes positifs et géométrie de $X$.

Par définition, une variété complexe compacte est kählerienne ssi son cône kählerien $\mathcal{K}$ est non vide, et il est immédiat de vérifier que le cône nef $\mathcal{N}$ est l'adhérence du cône $\mathcal{K}$ dans ce cas. Si de plus $\mathcal{K} \cap NS(X)_{\mathbf{R}}$ est non-vide, alors c'est un ouvert non vide de $NS(X)_{\mathbf{R}}$ ; $\mathcal{K}$ contient donc un point rationnel, i.e. un élément de $NS(X)_{\mathbf{Q}}$, et donc aussi un élément de $NS(X)$ puisque $\mathcal{K}$ est un cône. D'après ce qu'on a vu, ceci signifie qu'il existe un fibré en droites $L$ dont la première classe de Chern $c_1(L)$ est kählerienne. La variété $X$ est donc projective si (et seulement si) $\mathcal{K}$ rencontre $NS(X)_{\mathbf{R}}$.

Rappelons qu'un variété complexe compacte $X$ est dite de Moishezon ssi sa dimension algébrique $a(X)$ est maximale, i.e. égale à $\dim X$. La dimension algébrique $a(X)$ de $X$ est définie comme le degré de transcendance du corps $\mathbf{C}(X)$ des fonctions méromorphes sur $X$ ; c'est aussi la plus grande dimension d'Iitaka $\kappa(X, L)$ d'un fibré en droites $L$ sur $X$. $X$ est donc de Moishezon ssi elle est biméromorphe à une variété projective, ou bien ssi elle admet un fibré en droites gros. B.Moishezon a montré qu'étant donnée une variété de Moishezon $X$, il existe une suite finie d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que $\widetilde{X}$ soit projective ; en utilisant le théorème de régularisation des courants, Demailly et Paun ont obtenu une démonstration plus simple de ce résultat, contenu dans le :

**Théorème 1.2.11 (DP01)** *Soit $X$ une variété complexe compacte et $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe grosse. Alors il existe une suite finie d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ et une classe kählerienne $\widetilde{\alpha}$ sur $X$, qui de plus peut être choisie rationnelle lorsque $\alpha$ l'est.*

Nous allons donner la démonstration du théorème 1.2.11, car elle nous sera utile par la suite. Soit donc $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe grosse sur $X$ ; fixons par ailleurs une métrique hermitienne $\omega$. Par définition, $\alpha$ peut être représentée par un courant kählerien, i.e. un $(1,1)$-courant fermé $T$ tel que $T \geq \varepsilon\omega$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. En appliquant le théorème de régularisation 1.2.10, on peut de plus supposer que $T$ est à singularités algébriques ; on dispose donc d'un rationnel positif $c > 0$ et d'un idéal cohérent $\mathcal{I}$ tels que $cT$ soit de type $\mathcal{I}$. Par résolution des singularités (proposition 1.1.5), on trouve une suite finie d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que la partie résiduelle de $\mu^\star(cT)$ soit lisse ; on a donc $T = R + [D]$ pour un certain $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D$ et une $(1,1)$-forme fermée lisse $R$ ; puisque $T \geq \varepsilon\omega$, on a $\mu^\star T \geq \mu^\star \varepsilon\omega$, et donc aussi $R \geq \mu^\star\varepsilon\omega$ ; $R$ est donc positive, et strictement positive en dehors du diviseur exceptionnel $E$ de $\mu$, mais elle est *a priori* dégénérée le long de $E$. Sa classe de cohomologie n'est donc pas kählerienne *a priori*. On utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.2.12** *Soit $\pi : Z \to X$ l'éclatement de $X$ le long d'une sous-variété lisse $Y \subset X$, de diviseur exceptionnel $E$. Supposons que $\omega$ soit une $(1,1)$-forme lisse définie positive sur $X$ ; alors il existe une $(1,1)$-forme fermée lisse $\theta$ sur $Z$ cohomologue à $-E$ telle que $\mu^\star\omega + \varepsilon\theta > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.*

**Démonstration** : soit $\gamma$ un représentant lisse de $\{-E\}$. On sait que $E \to Y$ s'identifie au fibré projectif $\mathbf{P}(N_{Y/X}) \to Y$ des droites du fibré normal de $Y$ dans $X$, et que le fibré conormal $\mathcal{O}_E(-E)$ de $E$ dans $Z$ coincide avec le fibré tautologique $\mathcal{O}(1)$ via cette identification. Puisque ce dernier est relativement ample au dessus de $Y$, il peut être muni d'une métrique hermitienne lisse $h$ dont la forme de courbure est définie positive sur $T_{E/Y}$, ce qui signifie qu'il existe une fonction lisse $\varphi$ sur $E$ telle que $\gamma_{|E} + dd^c\varphi$ soit définie positive sur $T_{E/Y}$. On choisit alors un prolongement lisse arbitraire de $\varphi$ à $Z$, encore noté $\varphi$. Quitte à ajouter à $\varphi$ un grand multiple de $d(x,E)^2$, on peut supposer que $\theta := \gamma + dd^c\varphi$ est définie positive non seulement sur $T_{E/Y}$ mais aussi sur le fibré normal $N_{E/X}$ ; $\mu^\star\omega$ est quant à elle définie positive dans les directions horizontales de $E \to Y$, ce qui au final nous assure que $\mu^\star\omega + \theta$ est définie positive sur $T_X$ au dessus de tout point de $E$. Elle va donc également être définie positive sur un voisinage ouvert $U$ de $E$. On remarque maintenant que $\mu^\star\omega$ est définie positive sur le compact $\widetilde{X} - U$, et donc que $\mu^\star\omega + \varepsilon(\mu^\star\omega + \theta)$ y est aussi définie positive pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On finit la preuve du lemme en notant que $\mu^\star\omega + \varepsilon(\mu^\star\omega + \theta)$ est définie positive sur $U$ puisque $\mu^\star\omega$ est positive partout et que $\mu^\star\omega + \theta$ est définie positive sur $U$ par construction.

Revenons à la preuve du théorème : puisque $\mu : \widetilde{X} \to X$ est une suite finie d'éclatements de centre lisse, des applications successives du lemme précédent nous fournissent des $(1,1)$-formes lisses fermées $u_j$ cohomologues aux composantes irréductibles $E_j$ du diviseur exceptionnel de $\mu$ et des rationnels $\varepsilon_j > 0$ tels que

$$\mu^\star\omega - (\sum \varepsilon_j u_j)$$

soit définie positive sur $\widetilde{X}$. Il en résulte que $R - \sum \varepsilon_j u_j$ est une forme fermée lisse définie positive, i.e. une forme kählerienne, et $\widetilde{X}$ est donc bien une variété kählerienne. Si on suppose de plus que la classe $\alpha$ de départ est rationnelle, i.e. qu'elle appartient à $NS(X)_{\mathbf{Q}}$, alors la classe de $\mu^\star T$ est aussi rationnelle, et donc $R = \mu^\star T - [D]$ définit également une classe rationnelle, puisque $D$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur. Finalement, $\tilde{\alpha} := \{R - \sum \varepsilon_j u_j\} = \{R\} - \sum \varepsilon_j \{E_j\}$ est une classe kählerienne et rationnelle quand $\alpha$ l'est ; $X$ est projective dans ce cas.

Pour compléter ces résultats, nous reproduisons le résultat suivant, également dû à B.Moishezon :

**Théorème 1.2.13** *Toute variété de Moishezon compacte et kählerienne est projective.*

**Démonstration** : soit $X$ une variété de Moishezon compacte et kählerienne, de dimension $n$. On note $N_1 \subset H^{n-1,n-1}(X, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel engendré par les classes de courbes de $X$. Alors on a $H^{1,1}(X, \mathbf{R}) = NS(X)_{\mathbf{R}} \oplus N_1^\perp$ sous la dualité entre $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ et $H^{n-1,n-1}(X, \mathbf{R})$. En effet, c'est vrai sur une variété projective, et si $\mu : \widetilde{X} \to X$ est une modification avec $\widetilde{X}$ projective, cette propriété se transporte de $\widetilde{X}$ à $X$ en utilisant $\mu^\star$ et son inverse à gauche $\mu_\star$, comme on le voit aisément. On va montrer que le projeté sur $NS(X)_{\mathbf{R}}$ d'une classe kählerienne est encore kählerienne, en utilisant le critère de Nakai-Moishezon. On considère donc $\alpha \in NS(X)_{\mathbf{R}}$ et $\beta \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ orthogonale à toute courbe telles que $\omega := \alpha + \beta$ soit une classe kählerienne. Il s'agit de voir que $\alpha$ elle-même est alors kählerienne, et il suffit pour ce faire de montrer que $\alpha$ est une classe grosse. En effet, toutes les sous-variétés de $X$ ont une désingularisation kählerienne et de Moishezon, donc notre classe $\alpha$ sera par récurrence grosse sur toutes les sous-variétés de $X$, et donc kählerienne d'après [DP01]. On remarque maintenant que $\int_C \alpha = \int_C \omega$ est positive contre toute courbe, et donc que $\alpha$ est nef par [Pau98]. Pour voir que $\alpha$ est grosse, il reste à montrer que $\int_X \alpha^n > 0$ d'après [DP01]. Considérons l'éclatement $\pi : Y \to X$ d'un point quelconque de $X$, et notons $E$ son diviseur exceptionnel. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\pi^\star\alpha - \varepsilon\{E\}$ est dans $NS(Y)_{\mathbf{R}}$, $\pi^\star\beta$ est nulle sur les courbes de $Y$, et $\pi^\star\alpha - \varepsilon\{E\} + \pi^\star\beta = \pi^\star\omega - \varepsilon\{E\}$ est une classe kählerienne pour $\varepsilon > 0$ assez petit d'après le lemme 1.2.12. D'après ce qu'on vient de voir, $\pi^\star\alpha - \varepsilon\{E\}$ est donc nef, d'où $\int_Y (\pi^\star\alpha - \varepsilon\{E\})^n \geq 0$. Mais comme on a éclaté un point, $\{E\} \cdot \pi^\star\alpha^k = 0$ pour tout $k > 0$, donc $(\pi^\star\alpha - \varepsilon\{E\})^n = \pi^\star\alpha^n + \{-\varepsilon E\}^n$. Si l'on avait $\int_X \alpha^n = 0$, on se retrouverait avec $\int_Y \{-E\}^n \geq 0$, ce qui est impossible car $\{E\} \cdot \{-E\}^{n-1} = \int_{\mathbf{P}^{n-1}} c_1(\mathcal{O}(1))^{n-1} = 1$.

**Remarque** : la fin de la preuve montre en fait que les constantes de Seshadri $\varepsilon(\alpha, x)$ de $\alpha$ sont toutes strictement positives (cf. section 3.3). On peut donc en déduire directement que $\alpha$ est kählerienne.

# Chapitre 2

# Décomposition de Zariski divisorielle

## 2.1 Construction analytique

### 2.1.1 Le cône nef en codimension 1.

Nous allons introduire un nouveau cône dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$, le cône des classes nef en codimension 1. Soit $X$ une variété complexe compacte, et $\omega$ une métrique hermitienne.

**Définition 2.1.1** *Soit* $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$.
*(i) On dit que* $\alpha$ *est une classe kählerienne en codimension 1 ssi elle peut être représentée par un courant kählerien ne contenant pas de diviseurs.*
*(ii) On dit que* $\alpha$ *est une classe nef en codimension 1 ssi pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $(1,1)$*-courant presque positif fermé* $T_\varepsilon$ *dans* $\alpha$ *ne contenant pas de diviseur et tel que* $T_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$.

A nouveau, ces définitions sont indépendantes du choix de la métrique hermitienne $\omega$, car deux telles formes sont commensurables. Par ailleurs, les courants intervenant dans la définition peuvent être pris à singularités analytiques, comme le montre le théorème 1.2.10.

L'ensemble des classes kählerienne en codimension 1 forme un cône convexe ouvert $\mathcal{K}^1$ dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$, le cône kählerien en codimension 1, et l'ensemble des classes nef en codimension 1 est un cône convexe fermé $\mathcal{N}^1$ dans $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$, le cône nef en codimension 1. L'exemple de [DPS94] rappelé en 1.2.3 montre à nouveau qu'on ne peut prendre $\varepsilon = 0$ dans la définition d'une classe nef en codimension 1 en général. Si $T$ est un courant kählerien, sa partie résiduelle $R$ dans sa décomposition de Siu est aussi un courant kählerien, et $R$ ne contient plus de diviseurs par construction. On déduit donc du théorème 1.2.11 que le cône kählerien en codimension 1 est non vide ssi $X$ est une variété de Fujiki, et dans ce cas, $\mathcal{K}^1$ est l'intérieur de $\mathcal{N}^1$. Une classe kählerienne en codimension 1 peut se caractériser de la façon suivante :

**Proposition 2.1.2** *Une classe $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est kählerienne en codimension 1 ssi il existe une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ avec $\widetilde{X}$ lisse telle que $\alpha = \mu_\star\widetilde{\alpha}$ pour une classe kählerienne $\widetilde{\alpha}$ sur $\widetilde{X}$.*

**Démonstration** : si $\omega$ est une forme kählerienne sur $\widetilde{X}$, son poussé en avant $T := \mu_\star\omega$ est un courant kählerien ; de plus $T$ ne contient pas de diviseurs puisque $\mu$ est un isomorphisme au dessus du complémentaire d'un ensemble analytique de codimension au moins 2. Ainsi $\alpha = \{T\} = \mu_\star\{\omega\}$ est une classe kählerienne en codimension 1. La réciproque se montre comme dans le théorème 1.2.11.

### 2.1.2 Courants à singularités minimales

Supposons maintenant $X$ compacte, et soit $\gamma$ une $(1,1)$-forme réelle continue et $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$. On désigne par $\alpha[\gamma]$ l'ensemble des $(1,1)$-courants fermés $T$ dans la classe $\alpha$ tels que $T \geq \gamma$ ; $\alpha[\gamma]$ est un sous-ensemble convexe faiblement compact de l'espace des courants d'après la proposition 1.2.4. On munit $\alpha[\gamma]$ de la relation de préordre partiel $T_1 \preceq T_2$ de comparaison des singularités.

**Proposition 2.1.3** *Toute partie non vide de $(\alpha[\gamma], \preceq)$ admet un borne inférieure.*

**Démonstration** : Soit $T_i$, $i \in I$ une partie non vide de $\alpha[\gamma]$, et fixons un représentant lisse $\theta$ de la classe $\alpha$. Chaque élément $T_i$ peut s'écrire $\theta + dd^c\varphi_i$ avec $\varphi_i$ une fonction presque psh telle que $dd^c\varphi_i \geq \gamma - \theta$. Comme $X$ est compacte, toute fonction presque psh sur $X$ est majorée, donc on peut toujours s'arranger pour que $\varphi_i \leq 0$, quitte à soustraire à $\varphi_i$ une constante. On considère maintenant l'enveloppe supérieure et semi-continue supérieurement $\varphi$ de la famille $\varphi_i$, $i \in I$. Il est alors clair que $T := \theta + dd^c\varphi$ est moins singulier que chacun des $T_i$, et que si $S \in \alpha[\gamma]$ est un courant courant presque psh moins singulier que chacun des $T_i$, alors $S$ est moins singulier que $T$. Nous allons par contre préciser pourquoi $T$ appartient bien à $\alpha[\gamma]$, i.e. pourquoi $T \geq \gamma$. C'est une assertion locale ; pour tout $\varepsilon > 0$, en diagonalisant $\theta - \gamma$ en un point $x$, on peut trouver des coordonnées locales $z = (z_1, ..., z_n)$ centrées en $x$ et une forme $q(z) = \sum \lambda_j |z_j|^2$ telles que

$$dd^c(q(z) - \varepsilon|z|^2) \leq \theta - \gamma \leq dd^c(q(z) + \varepsilon|z|^2).$$

Puisque $T_i = \theta + dd^c\varphi_i \geq \gamma$, on voit donc que $\varphi_i + q(z) + \varepsilon|z|^2$ est psh près de $x$ ; l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions psh uniformément majorée étant psh, on en déduit que $\varphi + q(z) + \varepsilon|z|^2$ est aussi psh. Ainsi : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in X$, on a $T = \theta + dd^c\varphi \geq \gamma - 2\varepsilon dd^c|z|^2$ près de $x$. On en déduit que $T \geq \gamma$, qed.

Si $\gamma \geq 0$, $\gamma \log|z-x|$ est moins singulière que $\varphi$ en $x$ ssi $\gamma \log|z-x|$ est moins singulière que chacune des $\varphi_i$ en ce point ; on en déduit la relation suivante :

$$\nu(\inf_{i\in I} T_i, x) = \inf_{i\in I} \nu(T_i, x),$$

valable en tout point $x \in X$.
Lorsque $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est pseudoeffective, le plus petit élément de $\alpha[0]$, i.e. le moins singulier des courants positifs fermés contenus dans $\alpha$ sera appelé courant positif à singularités minimales dans $\alpha$, et noté $T_{\min} = T_{\min}(\alpha)$. Il est unique modulo $L^\infty$. Il est à noter que même quand $\alpha$ est une classe grosse, i.e. contient un courant kählerien, $T_{\min}$ n'est pas en général un courant kählerien :

**Proposition 2.1.4** *Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une classe grosse contenant un courant à singularités minimales $T_{\min}$ qui soit un courant kählerien, alors $\alpha$ est une classe kählerienne.*

**Démonstration** : soit $\theta$ un représentant lisse de $\alpha$, et écrivons $T_{\min} = \theta + dd^c\varphi$. Puisque ce dernier est kählerien, $(1-\varepsilon)T_{\min} + \varepsilon\theta$ est lui aussi kählerien pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et appartient à $\alpha$. Par minimalité de $T_{\min}$, on a donc $(1-\varepsilon)\varphi \leq \varphi + O(1)$, et on en déduit que $\varphi$ est bornée. En particulier, tous les nombres de Lelong de $T_{\min}$ sont nuls ; ce dernier étant kählerien, il peut alors être approché par une forme kählerienne dans $\alpha$ d'après le théorème 1.2.9 ; $\alpha$ est donc bien une classe kählerienne.

**Remarque :** bien qu'il soit unique modulo $L^\infty$, un courant à singularités minimales n'est pas unique en général : le cas d'une classe kählerienne suffira à s'en convaincre.

### 2.1.3 Multiplicités minimales et lieu non nef

Soit $X$ une variété complexe compacte et $\omega$ une métrique hermitienne. Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une classe pseudoeffective, on note $\alpha[-\varepsilon\omega]$ l'ensemble des courants $T \in \alpha$ tels que $T \geq -\varepsilon\omega$. Par définition, $\alpha$ est nef ssi il existe un courant lisse dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Or le théorème de régularisation 1.2.9 dit précisément que si $T$ est un courant dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$, ses nombres de Lelong sont l'obstruction à l'approcher par des courants lisses dans $\alpha$ avec une perte de positivité arbitrairement petite. Il en résulte donc que $\alpha$ est nef exactement quand les nombres de Lelong des courants à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$ sont nuls, d'où la

**Définition 2.1.5** *(i) La multiplicité minimale d'une classe pseudoeffective $\alpha$ en $x \in X$ est définie comme :*

$$\nu(\alpha, x) := \sup_{\varepsilon>0} \nu(T_{\min,\varepsilon}, x),$$

*où $T_{\min,\varepsilon}$ désigne un courant à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$.*
*(ii) Le lieu non nef de $\alpha$ est $L_{nef}(\alpha) := \{x \in X, \nu(\alpha, x) > 0\}$.*

Notons que la définition des multiplicités minimales est indépendante du choix de la métrique hermitienne $\omega$, car deux telles formes sont commensurables, et qu'elles sont finies puisqu'on a clairement $\nu(\alpha, x) \leq \nu(T_{\min}, x)$ pour tout courant positif à singularités minimales $T_{\min}$ dans $\alpha$. On remarque aussi que le lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$ est une réunion dénombrable d'ensemble analytiques, puisqu'on a

$$L_{nef}(\alpha) = \cup_{k,l>0} E_{1/k}(T_{\min,1/l}).$$

En fait, l'application $x \mapsto \nu(\alpha, x)$ est semi-continue supérieurement dans la topologie de Zariski dénombrable, pour les mêmes raisons. Comme on vient de le voir, $\alpha$ est nef ssi son lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$ est vide.

**Proposition 2.1.6** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective. Si $Y$ est un sous-ensemble analytique de $X$ non contenu dans le lieu non nef de $\alpha$, alors la restriction $\alpha_{|Y}$ est une classe pseudoeffective.*

**Démonstration** : soit $\varepsilon > 0$ et $T_{\min,\varepsilon}$ un courant à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$. D'après le théorème 1.2.10, on peut trouver un courant à singularités analytiques $T_{2\varepsilon}$ dans $\alpha[-2\varepsilon\omega]$ qui est moins singulier que $T_{\min,\varepsilon}$. On a donc

$$E_+(T_{2\varepsilon}) \subset E_+(T_{\min,\varepsilon}) \subset L_{nef}(\alpha),$$

et ce dernier ne contient pas $Y$ par hypothèse. Comme $T_{2\varepsilon}$ est à singularités analytiques le long de $E_+(T_{2\varepsilon})$ qui ne contient pas $Y$, sa restriction à $Y$ est bien définie, et vérifie $(T_{2\varepsilon})_{|Y} \geq -2\varepsilon\omega_{|Y}$. Par compacité faible, la famille de courants $(T_{2\varepsilon})_{|Y}$ sur $Y$ admet une valeur d'adhérence positive, ce qui montre le résultat.

Si $Y$ est un sous-ensemble analytique, on introduit la multiplicité minimale générique d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ le long de $Y$ en posant

$$\nu(\alpha, Y) := \inf_{x \in Y} \nu(\alpha, x).$$

On a en fait $\nu(\alpha, Y) = \nu(\alpha, x)$ pour $x \in Y$ très général, et $\nu(\alpha, Y) > 0$ ssi $Y \subset L_{nef}(\alpha)$. Par définition, une classe pseudoeffective $\alpha$ est nef en codimension 1 ssi $\nu(\alpha, D) = 0$ pour tout diviseur irréductible $D$, ou encore ssi son

lieu non nef ne contient pas de diviseur.
M.Paun a montré dans [Pau98] qu'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est nef ssi $\alpha_{|Y}$ est pseudoeffective pour tout sous-ensemble analytique irréductible $Y \subset X$. On a donc le

**Corollaire 2.1.7** *Une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est nef ssi $\alpha_{|Y}$ est pseudoeffective pour tout sous-ensemble irréductible $Y \subset L_{nef}(\alpha)$.*

### 2.1.4 Continuité des multiplicités minimales

Nous nous intéressons maintenant à la continuité de $\alpha \mapsto \nu(\alpha, x)$ et $\nu(\alpha, D)$ :

**Proposition 2.1.8** *Pour tout $x \in X$ et pour tout diviseur irréductible $D$, les fonctions $\mathcal{E} \to \mathbf{R}$ $\alpha \mapsto \nu(\alpha, x)$ et $\nu(\alpha, D)$ sont convexes et homogènes. Elles sont continues sur l'intérieur $\mathcal{E}^0$ du cône pseudoeffectif, et sont semi-continues inférieurement sur $\mathcal{E}$ tout entier.*

**Démonstration** : soit $\alpha$, $\beta$ deux classes pseudoeffectives. Si $T_{\min,\varepsilon}(\alpha)$ et $T_{\min,\varepsilon}(\beta)$ sont des courants à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$ et $\beta[-\varepsilon\omega]$ respectivement, alors $T_{\min,\varepsilon}(\alpha)+T_{\min,\varepsilon}(\alpha)$ appartient à $(\alpha+\beta)[-2\varepsilon\omega]$, et donc

$$\nu(T_{\min,2\varepsilon}(\alpha+\beta), x) \leq \nu(T_{\min,\varepsilon}(\alpha), x) + \nu(T_{\min,\varepsilon}(\beta), x) \leq \nu(\alpha, x) + \nu(\beta, x).$$

On déduit de ceci que $\nu(\alpha+\beta, x) \leq \nu(\alpha, x) + \nu(\beta, x)$, et la propriété de sous-additivité de $\nu(\cdot, D)$ s'obtient de la même manière. Puisque l'homogénéité de nos deux fonctions est évidente, la convexité en résulte.
L'application quotient $\theta \mapsto \{\theta\}$ de l'espace de Fréchet des $(1,1)$-formes fermées sur $H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est surjective, donc ouverte. Si $\alpha_k \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une suite de classes pseudoeffectives convergeant vers $\alpha$, et si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut donc trouver une forme lisse $\theta_k \in \alpha - \alpha_k$ pour tout $k$ assez grand, telle que

$$-\varepsilon\omega \leq \theta_k \leq \varepsilon\omega.$$

Le courant $T_{\min,\varepsilon}(\alpha_k) + \theta_k$ est alors dans $\alpha[-2\varepsilon\omega]$, et donc

$$\nu(T_{\min,2\varepsilon}(\alpha), x) \leq \nu(T_{\min,\varepsilon}(\alpha_k), x) \leq \nu(\alpha_k, x)$$

pour tout $k$ assez grand. On en déduit que $\nu(T_{\min,2\varepsilon}(\alpha), x) \leq \liminf_{k\to\infty} \nu(\alpha_k, x)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\nu(\alpha, x) \leq \liminf_{k\to\infty} \nu(\alpha_k, x)$, en prenant le supremum du membre de gauche sur tous les $\varepsilon > 0$. Ceci signifie que $\alpha \mapsto \nu(\alpha, x)$ est semi-continue inférieurement ; la preuve pour $\nu(\alpha, D)$ est bien sûr similaire, en remplaçant simplement $x$ par $D$. Enfin, les restrictions de nos fonctions à l'intérieur du cône pseudoeffectif sont continues comme le sont toutes les

fonctions convexes sur un sous-ensemble convexe ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie.
**Remarque** : nous donnerons en appendice un exemple, dû à Nakayama, où certaines multiplicités minimales ne sont pas continues jusqu'au bord de $\mathcal{E}$.

**Proposition 2.1.9** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective, et $T_{\min}$ un courant positif fermé à singularités minimales dans $\alpha$.*
*(i) On a toujours $\nu(\alpha, x) \leq \nu(T_{\min}, x)$ et $\nu(\alpha, D) \leq \nu(T_{\min}, D)$.*
*(ii) Si $\alpha$ est de plus grosse, on a $\nu(\alpha, x) = \nu(T_{\min}, x)$ et $\nu(\alpha, D) = \nu(T_{\min}, D)$.*

**Démonstration** : puisque $T_{\min}$ appartient à $\alpha[-\varepsilon\omega]$ pour tout $\varepsilon > 0$, (i) est clair. Si $\alpha$ est de plus grosse, on peut choisir un courant kählerien $T$ dans $\alpha$, qui vérifie par définition $T \geq \omega$ pour une métrique hermitienne $\omega$. Si $T_{\min,\varepsilon}$ est un courant à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$, alors $(1-\varepsilon)T_{\min,\varepsilon} + \varepsilon T$ est un courant positif dans $\alpha$, et donc $\nu((1-\varepsilon)T_{\min,\varepsilon} + \varepsilon T, x) \geq \nu(T_{\min}, x)$ par minimalité de $T_{\min}$ ; on en déduit

$$(1-\varepsilon)\nu(\alpha, x) + \varepsilon\nu(T, x) \geq \nu(T_{\min}, x).$$

On obtient ainsi l'inégalité $\nu(\alpha, x) \geq \nu(T_{\min}, x)$ en laissant $\varepsilon \to 0$. Le cas de $\nu(\alpha, D)$ est similaire.

En utilisant cette proposition, on montre la

**Proposition 2.1.10** *Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de $X$ le long d'une sous-variété lisse $Y \subset X$, et notons $E$ son diviseur exceptionnel. Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une classe grosse, on a :*

$$\nu(\alpha, Y) = \nu(\pi^\star\alpha, E).$$

**Démonstration** : comme $\alpha$ est grosse, $\pi^\star\alpha$ l'est aussi d'après la proposition 1.2.5, et la proposition 2.1.9 montre donc que $\nu(\alpha, Y) = \inf_S \nu(S, Y)$ pour $S \in \alpha$ positif, et de même $\nu(\pi^\star\alpha, E) = \inf_T \nu(T, E)$ pour $T \in \pi^\star\alpha$ positif. D'après la proposition 1.2.7, $S \mapsto \pi^\star S$ établit une bijection entre les courants positifs dans $\alpha$ et ceux dans $\pi^\star\alpha$, et comme de plus on a $\nu(S, Y) = \nu(\pi^\star S, E)$ pour tout courant positif fermé $S$ par le corollaire 1.1.8, le résultat suit.

### 2.1.5 Définition de la décomposition de Zariski divisorielle.

La décomposition de Zariski divisorielle d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une construction qui consiste à retirer à $\alpha$ la partie divisorielle de son lieu non-nef $L_{nef}(\alpha)$, comptée avec multiplicités, de manière à décomposer $\alpha$ en une partie nef en codimension 1 et une partie "négative". Un diviseur irréductible $D$ est contenu dans ce lieu non-nef ssi $\nu(\alpha, D) > 0$, de sorte que la partie divisorielle en question est $\sum \nu(\alpha, D)D$. Le problème est qu'un nombre infini de diviseurs peut apparaître dans $L_{nef}(\alpha)$ ; on commence donc par définir $\sum \nu(\alpha, D)[D]$ comme une série (convergente !) de courants : si $T_{\min}$ est un courant positif à singularités minimales dans $\alpha$, on a $\nu(\alpha, D) \leq \nu(T_{\min}, D)$ pour tout diviseur irréductible $D$ par la proposition 2.1.9, et la série de courants $\sum \nu(\alpha, D)[D]$ est donc convergente, puisque dominée par $\sum \nu(T_{\min}, D)[D]$.

**Définition 2.1.11 (Décomposition de Zariski divisorielle)** *La partie négative d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est définie comme le courant*

$$N(\alpha) := \sum \nu(\alpha, D)[D].$$

*La projection de Zariski de $\alpha$ est*

$$Z(\alpha) := \alpha - \{N(\alpha)\}.$$

*Nous appellerons la décomposition $\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$ sa décomposition de Zariski divisorielle.*

Nous allons montrer que le lieu non-nef de $\alpha$ ne contient qu'un nombre fini de diviseurs irréductibles, de sorte que la partie négative $N(\alpha)$ est un diviseur (cf. théorème 2.1.15). Pour l'instant, nous nous penchons sur la projection de Zariski.

**Proposition 2.1.12** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective. Alors :*
*(i) Sa projection de Zariski $Z(\alpha)$ est nef en codimension 1.*
*(ii) On a $Z(\alpha) = \alpha$ ssi $\alpha$ est nef en codimension 1.*
*(iii) $Z(\alpha)$ est grosse ssi $\alpha$ l'est.*
*(iv) Si $\alpha$ n'est pas nef en codimension 1, alors $Z(\alpha)$ appartient au bord $\partial\mathcal{N}^1$ du cône nef en codimension 1.*

**Démonstration** :(i) Soit comme avant $T_{\min,\varepsilon}$ un courant à singularités minimales dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$, et considérons sa décomposition de Siu
$T_{\min,\varepsilon} = R_\varepsilon + \sum \nu(T_{\min,\varepsilon}, D)[D]$. En premier lieu, je dis que $N_\varepsilon := \sum \nu(T_{\min,\varepsilon}, D)[D]$ converge faiblement vers $N(\alpha)$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0. Pour le voir, on commence par remarquer que pour toute forme forme lisse $\theta$ de bidimension $(1, 1)$, $\theta + C\omega^{n-1}$ est une forme positive pour $C > 0$ assez grand. Toute forme test $\theta$ de bidimension $(1, 1)$ est donc la différence de deux formes positives, et il suffit de montrer que $\int N_\varepsilon \wedge \theta \to \int N(\alpha) \wedge \theta$ pour toute forme positive $\theta$. Mais $\int N_\varepsilon \wedge \theta = \sum \nu(T_{\min,\varepsilon}, D) \int [D] \wedge \theta$ est un série convergente dont le terme général $\nu(T_{\min,\varepsilon}, D) \int [D] \wedge \theta$ converge vers $\nu(\alpha, D) \int [D] \wedge \theta$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et

est dominé par $\nu(T_{\min}, D)\int[D]\wedge\theta$ ; puisque $\sum\nu(T_{\min}, D)\int[D]\wedge\theta \leq \int T_{\min}\wedge\theta$ converge, notre assertion suit par convergence dominée.
En particulier, la classe $\{N_\varepsilon - N(\alpha)\}$ tend vers zéro. Puisque l'application $\theta \mapsto \{\theta\}$ est ouverte, on peut trouver une suite de formes lisses $\theta_k \geq -\delta_k\omega$ telle que $\theta_k \in \{N_{\varepsilon_k} - N(\alpha)\}$ si $\varepsilon_k \ll \delta_k \ll 1$ sont deux suites bien choisies. Il reste à remarquer que $T_k := R_{\varepsilon_k} + \theta_k$ est un courant dans $Z(\alpha)$ avec $T_k \geq -(\varepsilon_k+\delta_k)\omega$ et qui ne contient pas de diviseurs. Puisque $\varepsilon_k+\delta_k$ converge vers zéro, $Z(\alpha)$ est bien nef en codimension 1.
(ii) Puisque $N(\alpha) = \sum\nu(\alpha, D)[D]$ est un courant positif fermé, il est nul ssi sa classe $\{N(\alpha)\} \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ l'est (intégrer contre $\omega^{n-1}$, où $\omega$ est de Gauduchon). L'assertion revient donc à dire que $\alpha$ est nef en codimension 1 ssi son lieu non nef ne contient pas de diviseurs, ce qu'on a déjà vu.
(iii) Si $Z(\alpha)$ est grosse, alors $\alpha = Z(\alpha)+\{N(\alpha)\}$ est bien sûr grosse également. Si réciproquement $\alpha$ est grosse, elle contient un courant kählerien $T$, dont on écrit la décomposition de Siu $T = R + \sum\nu(T, D)[D]$. On remarque que la partie résiduelle $R$ est un courant kählerien ; puisque $T$ appartient à $\alpha[-\varepsilon\omega]$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\nu(T, D) \geq \nu(\alpha, D)$, et $R + \sum(\nu(T, D) - \nu(\alpha, D))[D]$ est donc un courant kählerien appartenant à $Z(\alpha)$, qed.
(iv) Supposons que $Z(\alpha)$ appartienne à l'intérieur $(\mathcal{N}^1)^0$ du cône nef en codimension 1. On doit montrer que $\nu(\alpha, D) = 0$ pour tout diviseur irréductible $D$. Supposons donc que $\nu(\alpha, D_0) > 0$ pour un certain $D_0$. La classe
$Z(\alpha) + \varepsilon\{D_0\}$ appartient elle aussi à l'ouvert $(\mathcal{N}^1)^0$ pour $\varepsilon$ assez petit, et on peut donc écrire pour $0 < \varepsilon < \nu(\alpha, D_0)$ :

$$\alpha = (Z(\alpha) + \varepsilon\{D_0\}) + (\nu(\alpha, D_0) - \varepsilon)\{D_0\} + \{\sum_{D\neq D_0}\nu(\alpha, D)D\}.$$

On en déduit que $\nu(\alpha, D_0) \leq \nu(Z(\alpha)+\varepsilon\{D_0\}, D_0)+(\nu(\alpha, D_0)-\varepsilon)$. Comme de plus $\nu(Z(\alpha) + \varepsilon\{D_0\}, D_0) = 0$ puisque $Z(\alpha) + \varepsilon\{D_0\}$ est nef en codimension 1, on obtient la contradiction $\nu(\alpha, D_0) \leq \nu(\alpha, D_0) - \varepsilon$.

**Proposition 2.1.13** *(i) L'application $\alpha \mapsto N(\alpha)$ est convexe et homogène sur $\mathcal{E}$. Elle est continue sur l'intérieur du cône pseudoeffectif.*
*(ii) La projection de Zariski $Z : \mathcal{E} \to \mathcal{N}^1$ est concave et homogène. Elle est continue sur l'intérieur de $\mathcal{E}$.*

**Démonstration** : tout ceci découle immédiatement de la proposition 2.1.8, hormis peut-être la continuité. Celle-ci s'obtient en remarquant que $\alpha \mapsto \int N(\alpha)\wedge\theta$ est une fonction convexe sur $\mathcal{E}$ pour toute forme test positive $\theta$.

### 2.1.6 Partie négative et diviseurs exceptionnels

Si $A = D_1, ..., D_r$ est une famille finie de diviseurs irréductibles, on note $V_+(A) = \sum_j \mathbf{R}_+\{D_j\}$ le cône convexe engendré par les classes $\{D_1\}$,...,$\{D_r\}$.

Chaque élément de $V_+(A)$ s'écrit donc $\alpha = \{E\}$ pour un $\mathbf{R}$-diviseur effectif supporté par les $D_j$. Puisque $[E]$ est un courant positif dans $\alpha$, on a $N(\alpha) \leq E$. Ainsi, $N(\alpha)$ est une somme finie dans ce cas (i.e. un diviseur), et $Z(\alpha)$ peut être représenté par le $\mathbf{R}$-diviseur effectif $E - N(\alpha)$, qui est aussi supporté par les $D_j$. En d'autres termes : $V_+(A)$ est stable sous la projection de Zariski $Z$. En particulier, on a $Z(V_+(A)) = 0$ ssi $V_+(A)$ ne rencontre $\mathcal{N}^1$ qu'en 0.

**Définition 2.1.14** *On dira que $A = D_1, ..., D_r$ est une famille exceptionnelle de diviseurs irréductibles ssi $Z(V_+(A)) = 0$.*

**Théorème 2.1.15** *Pour toute classe $\alpha \in \mathcal{E}$, l'ensemble des diviseurs irréductibles contenus dans son lieu non-nef est fini et exceptionnel. En fait, le passage au quotient $D \mapsto \{D\}$ est injectif en restriction à l'espace vectoriel engendré par ces diviseurs.*

**Démonstration** : on commence par remarquer que $Z(\alpha) \geq ZZ(\alpha) + Z(\{N(\alpha)\})$ et $ZZ(\alpha) = Z(\alpha)$ d'après la proposition 2.1.12, d'où $Z(\{N(\alpha)\}) = 0$. Soit maintenant $D_1, ..., D_r$ des diviseurs irréductibles contenus dans le lieu non-nef de $\alpha$, et soit $E$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif porté par les $D_i$. On a alors $E \leq tN(\alpha)$ pour $t > 0$ assez grand, puisque les $D_i$ apparaissent dans le support de $N(\alpha)$, et donc $Z(\{E\}) \leq tZ(\{N(\alpha)\}) = 0$. On voit donc $D_1, ..., D_r$ est une famille exceptionnelle par définition. De plus, on a $N(\{E\}) \leq E$ et leurs classes sont égales, donc $E = N(\{E\})$. De là, on déduit aisément le second point, ce qui conclut la démonstration.

Les diviseurs exceptionnels sont plongés de façon très rigide dans $X$ :

**Proposition 2.1.16** *Si $E$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif exceptionnel, alors sa classe $\{E\}$ ne contient qu'un seul courant positif fermé, à savoir le courant d'intégration $[E]$. En particulier, quand $E$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur, sa dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(X, E)$ est nulle.*

**Démonstration** : si $T$ est un courant positif dans $\{E\}$, on a $\nu(T, D) \geq \nu(\{E\}, D)$ pour tout diviseur irréductible $D$. Grâce à la décomposition de Siu de $T$, on a $T \geq \sum \nu(T, D)[D]$, et on voit donc que $T - [E] \geq$ est un courant positif. Puisqu'il est nul en cohomologie, il est nul en tant que courant, et $T = [E]$. Pour voir le dernier point, soit $D$ un élément du système linéaire $|kE|$ pour un entier $k > 0$ tel que $kE$ soit Cartier. Le courant positif $\frac{1}{k}[D]$ est alors un élément de $\{E\}$, donc on a $[D] = k[E]$ en tant que courants, et donc $D = kE$ comme diviseur. Ceci montre que $h^0(kE) = 1$ pour tout $k > 0$, qed.

### 2.1.7 Discontinuités de la projection de Zariski

La projection de Zariski $Z : \mathcal{E} \to \mathcal{N}^1$ est continue sur l'intérieur du cône pseudoeffectif, mais elle n'est pas continue jusqu'au bord en général. On peut produire des exemples grâce à la

**Proposition 2.1.17** *Si $X$ contient un nombre infini de diviseurs irréductibles exceptionnels, alors la projection de Zariski n'est pas continue.*

**Démonstration** : nous utiliserons le

**Lemme 2.1.18** *si $D_k$ est une suite infinie de diviseurs, les rayons $\mathbf{R}_+\{D_k\} \subset \mathcal{E}$ s'accumulent seulement sur $\mathcal{N}^1$.*

**Démonstration** : comme $\alpha \mapsto \nu(\alpha, x)$ est semi-continue inférieurement (proposition 2.1.8), on voit que le lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$ de la limite de toute suite $\alpha_k$ de classes pseudoeffectives est contenu dans l'ensemble

$$\liminf_{k\to\infty} L_{nef}(\alpha_k) := \cap_{l\geq 0} \cup_{k\geq l} L_{nef}(\alpha_k).$$

En appliquant ceci à $\alpha_k = t_k\{D_k\}$ avec $t_k > 0$, on obtient que $L_{nef}(\alpha)$ ne peut contenir de diviseurs puisque $L_{nef}(t_k\{D_k\}) \subset D_k$. Ceci signifie bien que toute valeur d'adhérence $\alpha$ des rayons $\mathbf{R}_+\{D_k\}$ est nef en codimension 1.
Supposons maintenant qu'une suite infinie $D_k$ de diviseurs irréductibles exceptionnels existe. Puisque le cône $\mathcal{E}$ est à base compacte, on peut supposer quitte à extraire une sous-suite que $t_k\{D_j\}$ converge vers une classe pseudoeffective non-nulle $\alpha$ pour des $t_k > 0$ bien choisis. Comme $D_k$ est exceptionnel, on a $Z(t_k\{D_k\}) = 0$ pour tout $k$, mais la limite $\alpha$ est nef en codimension 1 d'après le lemme, et donc $Z(\alpha) = \alpha$ est non nul à la limite.

Par exemple, l'éclaté de $\mathbf{P}^2$ en au moins neuf points en position générale est une surface contenant une infinité de $(-1)$-courbe, i.e. de courbes rationnelles lisses de carré $-1$ (cf. [Har77], p.409). Ces courbes sont exceptionnelles d'après le théorème 4.2.8, et on obtient un exemple de projection de Zariski discontinue.
**Remarque** : sur une surface, la réciproque de la proposition ci-dessus est vraie, puisque les multiplicités $\alpha \mapsto \nu(\alpha, D)$ sont continues dans ce cas (cf. proposition 4.2.15).

### 2.1.8 Caractérisation de la décomposition de Zariski divisorielle

Supposons que nous ayons écrit une classe pseudoeffective $\alpha$ comme la somme $\alpha = p + \{N\}$ d'une classe nef en codimension 1 $p$ et de la classe d'un

$\mathbf{R}$-diviseur effectif $N$. Nous souhaitons un critère permettant de déterminer quand cette décomposition est la décomposition de Zariski divisorielle de $\alpha$. Comme $N(\alpha) \leq N(p) + N$ et $N(p) = 0$ puisque $p$ est nef en codimension 1, $N(\alpha) = N$ se produit ssi $Z(\alpha) = p$, et notre question revient à l'étude des fibres $Z^{-1}(p)$ de la projection de Zariski $Z : \mathcal{E} \to \mathcal{N}^1$. Nous allons en fait étudier les fibres $Z^{-1}(p)$ au dessus d'une classe grosse. On introduit à cette fin la

**Définition 2.1.19 (lieu non kählerien)** *Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une classe grosse, on définit son lieu non kählerien comme étant*

$$L_{kah}(\alpha) := \cap_T E_+(T)$$

*où $T$ décrit tous les courants kähleriens dans $\alpha$.*

Pour justifier la terminologie, on montre le

**Théorème 2.1.20** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe grosse. Alors :*
*(i) Le lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$ est contenu dans le lieu non kählerien $L_{kah}(\alpha)$.*
*(ii) Il existe un courat kählerien à singularités analytiques $T$ dans $\alpha$ tel que $E_+(T) = L_{kah}(\alpha)$. En particulier, $L_{kah}(\alpha)$ est un sous-ensemble analytique de $X$.*
*(iii) $\alpha$ est une classe kählerienne ssi son lieu non kählerien $L_{kah}(\alpha)$ est vide. Plus généralement, $\alpha$ est une classe kählerienne ssi $\alpha_{|Y}$ est une classe kählerienne pour toute composante irréductible $Y$ de $L_{kah}(\alpha)$.*

**Démonstration** :(i) Puisque $\alpha$ est grosse, son lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$ est juste $E_+(T_{\min})$ par la proposition 2.1.9. Pour tout courant positif $T$ dans $\alpha$, on a $E_+(T_{\min}) \subset E_+(T)$, et le résultat suit.
(ii) Pour commencer, je dis qu'étant donnés deux courants kähleriens $T_1$, $T_2$ dans $\alpha$, il existe un courant kählerien $T$ dans $\alpha$ à singularités analytiques tel que $E_+(T) \subset E_+(T_1) \cap E_+(T_2)$. En effet, nos deux courants appartiennent à $\alpha[\varepsilon\omega]$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On choisit alors une borne supérieure $T_3$ de nos deux courants dans cet ensemble, i.e. un courant kählerien dans $\alpha$ moins singulier que chacun des $T_i$. On applique alors le théorème 1.2.10 de sorte que l'on trouve un courant $T$ dans $\alpha$ à singularités analytiques légèrement moins singulier et moins positif que $T_3$. Le courant $T$ en question convient.
Grâce à cette remarque et au théorème 1.2.10, il est facile de construire une suite de courants kähleriens à singularités analytiques $T_k \in \alpha$ qui soient de moins en moins singuliers et tels que $L_{kah}(\alpha) = \cap_k E_+(T_k)$. Comme chaque $T_k$ est à singularités analytiques, $E_+(T_k)$ est un ensemble analytique, la suite décroissante $E_+(T_k)$ est stationnaire par la propriété noetherienne forte. On obtient donc finalement $L_{kah}(\alpha) = E_+(T_k)$ pour $k$ assez grand, qed.
(iii) Si $T$ est un courant kählerien dans $\alpha$ tel que $E_+(T) = L_{kah}(\alpha)$ comme

en (ii), et si $\alpha_{|Y}$ est une classe kählerienne pour chaque composante $Y$ de $L_{kah}(\alpha)$, alors $\alpha$ est une classe kählerienne d'après [DP01]. Le reste est clair.

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 2.1.21** *Soit $p$ une classe grosse et nef en codimension 1. Alors les composantes divisorielles $D_1, ..., D_r$ de son lieu non kählerien $L_{kah}(p)$ forment une famille exceptionnelle, et la fibre de $Z$ au dessus de $p$ est le cône simplicial*

$$Z^{-1}(p) = p + \sum \mathbf{R}_+\{D_j\}.$$

*Quand $p$ est une classe nef en codimension 1 quelconque, la fibre $Z^{-1}(p)$ est une réunion dénombrable de cônes simpliciaux engendrés par des familles exceptionnelles.*

**Démonstration** : soit d'abord $\alpha$ une classe pseudoeffective et $E_1, ..., E_r$ les composantes divisorielles de son lieu non nef $L_{nef}(\alpha)$. Je dis que le cône simplicial $Z(\alpha) + \sum \mathbf{R}_+\{E_j\}$ est tout entier contenu dans la fibre $Z^{-1}Z(\alpha)$. En effet, la restriction de $Z$ à ce cône convexe est une application concave partout plus grande que $Z(\alpha)$ (i.e. $Z(\beta) - Z(\alpha) \in \mathcal{E}$ pour toute classe $\beta$ dans ce cône) et coincide avec $Z(\alpha)$ au point $\alpha$ de l'intérieur relatif de ce convexe, et on a donc bien $Z(\beta) = Z(\alpha)$ pour toute $\beta$ dans ce cône, par concavité de $Z$. Ceci montre déjà la dernière assertion.
Soit maintenant $p$ une classe grosse et nef en codimension 1. Montrons tout d'abord que $Z^{-1}(p) \subset p + \sum \mathbf{R}_+\{D_j\}$. De façon équivalente, soit $\alpha$ une classe pseudoeffective telle que $Z(\alpha) = p$ ; on veut voir que $N(\alpha)$ est supporté par les $D_j$, i.e. que tout diviseur irréductible $D_0$ tel que $\nu(\alpha, D_0) > 0$ est contenu dans $L_{kah}(p)$. Si tel n'est pas le cas, on peut trouver un courant kählerien $T$ dans $p$ tel que $\nu(T, D_0)$ soit nul. Si $\theta$ est un représentant lisse de $\{D_0\}$, $T + \varepsilon\theta$ est encore un courant kählerien pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Dans ce cas,

$$T_\varepsilon := T + \varepsilon\theta + (\nu(\alpha, D_0) - \varepsilon)[D_0] + \sum_{D \neq D_0} \nu(\alpha, D)[D]$$

est un courant positif dans $\alpha$ avec $\nu(T_\varepsilon, D_0) = \nu(\alpha, D_0) - \varepsilon < \nu(\alpha, D_0) = \nu(T_{\min}, D_0)$ (la dernière égalité a lieu grâce à la proposition 2.1.9, vu que $\alpha$ est grosse puisque $p$ l'est). Ceci contredit la minimalité de $T_{\min}$, et prouve l'inclusion

$$Z^{-1}(p) \subset p + \sum \mathbf{R}_+\{D_j\}.$$

Réciproquement, soit $\alpha = p + \{E\}$, où $E$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif supporté par les $D_i$. On veut voir que $Z(\alpha) = p$. Soit $T$ un courant kählerien dans $p$, et $R$ sa partie résiduelle. $R$ est un courant kählerien qui ne contient pas de diviseur, donc la classe $\beta := \{R\}$ est kählerienne en codimension 1. Je dis que chacun des $D_i$ est contenu dans le lieu non nef de $p-\varepsilon\beta$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Comme $p-\varepsilon\beta$ est grosse, ceci revient à voir que $\nu(T, D_i) > 0$ pour tout courant positif $T$ dans $p-\varepsilon\beta$ d'après la proposition 2.1.9. Mais si $T$ est un tel courant, $T+\varepsilon R$ est un courant kählerien dans $p$, donc $\nu(T+\varepsilon R, D_i) > 0$ puisque $D_i$ est contenu dans le lieu non kählerien de $p$. Comme $R$ ne contient pas de diviseur, l'assertion suit. D'après la première partie de la preuve, on en déduit que

$$Z(p-\varepsilon\beta) + \sum \mathbf{R}_+\{D_i\} \subset Z^{-1}Z(p-\varepsilon\beta)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. En particulier, $Z(p-\varepsilon\beta)$ est la projection de Zariski de $Z(p-\varepsilon\beta)+\{E\}$. $Z$ est continue en $p$ puisque $p$ est grosse, donc $Z(p-\varepsilon\beta)$ converge vers $Z(p) = p$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0. $Z$ est aussi continue en $\alpha = p+\{E\}$, donc la projection de Zariski de $Z(p-\varepsilon\beta)+\{E\}$ converge vers celle de $\alpha = p+\{E\}$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, et on a donc bien à la limite $Z(\alpha) = p$, qed.

### 2.1.9 Structure du cône pseudoeffectif

**Théorème 2.1.22** *Le cône pseudoeffectif est localement polyhédral en dehors du cône nef en codimension 1. Les rayons extrémaux de $\mathcal{E}$ non contenus dans $\mathcal{N}^1$ sont exactement les rayons $\mathbf{R}_+\{D\}$, où $D$ est un diviseur irréductible exceptionnel.*

**Démonstration** : pour tout diviseur irréductible $D$, posons

$$\mathcal{E}_D := \{\alpha \in \mathcal{E}, \nu(\alpha, D) = 0\}.$$

Comme $\nu(\alpha, D)$ est convexe, homogène, positive et semi-continue inférieurement, $\mathcal{E}_D$ est un cône convexe fermé, et l'on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_D + \mathbf{R}_+\{D\}$$

pour tout diviseur $D$, comme on le voit sur la décomposition de Zariski divisorielle $\alpha = Z(\alpha) + \sum_E \nu(\alpha, E)\{E\}$ de toute $\alpha \in \mathcal{E}$.Il reste alors à remarquer que $\alpha$ est dans $\mathcal{N}^1$ ssi $\nu(\alpha, D) = 0$ pour tout diviseur $D$, i.e. ssi $\alpha$ se trouve dans l'intersection des $\mathcal{E}_D$. Si $\alpha$ n'est pas dans $\mathcal{N}^1$, on a donc trouvé un cône convexe fermé $\mathcal{E}_D$ ne contenant pas $\alpha$ tel que $\mathcal{E}$ soit engendré par $\mathcal{E}_D$ et $\mathbf{R}_+\{D\}$, et ceci montre que $\mathcal{E}$ est localement polyhédral en dehors de $\mathcal{N}^1$. Si $R$ est un rayon extrémal de $\mathcal{E}$ qui n'est pas contenu dans $\mathcal{N}^1$, $R$ n'appartient pas à l'un des $\mathcal{E}_D$, et est donc égal à l'un des $\mathbf{R}_+\{D\}$. Réciproquement, on a plus généralement le

**Lemme 2.1.23** *Si $D_1, ..., D_q$ est une famille exceptionnelle de diviseurs irréductibles, le cône simplicial $\sum \mathbf{R}_+\{D_i\}$ est extrémal dans $\mathcal{E}$.*

**Démonstration** : soit $E$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif supporté par les $D_i$, et supposons que $\{E\} = \alpha_1 + \alpha_2$ soit la somme de deux classes effectives. Comme $Z$ est concave et homogène, on a $0 = Z(\{E\}) \geq Z(\alpha_1) + Z(\alpha_2)$, et donc $Z(\alpha_1) = Z(\alpha_2) = 0$. On voit alors que $E = N(\alpha_1) + N(\alpha_2)$, de sorte que chacun des $N(\alpha_i)$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif supporté par les $D_i$, qed.

## 2.2 L'approche algébrique

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux multiplicités minimales et à la décomposition de Zariski divisorielle de la première classe de Chern $\alpha = c_1(L)$ d'un fibré en droites $L$. L'idée générale est que ces constructions peuvent se lire sur le comportement asymptotique des systèmes linéaires $|kL|$ pour $k \to +\infty$, lorsque $L$ est gros. Le cas général s'obtient en approchant un fibré en droites pseudoeffectif $L$ par $L + \varepsilon A$ où $A$ est gros. Nous nous placerons jusqu'à nouvel ordre sur une variété projective $X$.

### 2.2.1 Courants associés aux sections d'un fibré.

Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte $X$ (qui n'a pas à être projective pour l'instant). Si $\sigma_1, ..., \sigma_N \in H^0(X, L)$ sont des sections globales de $L$, on peut définir une métrique singulière sur le dual $L^\star$ par

$$h(v) := \sum_{1 \leq i \leq N} \langle v, \sigma_i \rangle.$$

La métrique duale sur $L$ a pour poids local $\frac{1}{2}\log(\sum |\sigma_i|^2)$, de sorte que le courant de courbure $\Theta_h(L)$ est un courant positif de type $\mathcal{I}$, l'idéal engendré par l'image des $\sigma_i$ sous le morphisme d'évaluation

$$H^0(X, L) \otimes \mathcal{O}_X(-L) \to \mathcal{O}_X.$$

En particulier, si les $\sigma_i$ forment une base d'un sous-espace vectoriel $V \subset H^0(X, \mathcal{O}(L))$, on obtient un courant positif fermé $T_{|V|}$ appartenant à $c_1(L)$, qui est à singularités de type $B_{|V|}$, le schéma base du système linéaire $|V|$ ($T_{|V|}$ dépend du choix de la base de $V$, mais il est bien défini modulo $C^\infty$). Soit $\Phi_{|V|} : X - \to \mathbf{P}(V)$ l'application méromorphe associée à $V$, qui à $x \in X$ associe l'hyperplan $\{\sigma \in V, \sigma(x) = 0\} \in \mathbf{P}(V)$. Le choix de la base $\sigma_i$ de $V$ identifie ce dernier à $\mathbf{C}^N$, donc munit $\mathbf{P}(V)$ d'une métrique de Fubini-Study $\omega_{FS}$, et l'on vérifie aisément que $T_{|V|}$ est aussi le courant tiré en arrière

$(\Phi_{|V|})^\star\omega_{FS}$ par l'application méromorphe $\Phi_{|L|}$ (on peut toujours définir un tel objet, par exemple en passant par une désingularisation du graphe de $\Phi_{|L|}$).
Comme $T_{|V|}$ est de type $B_{|V|}$, il contient beaucoup d'information sur cet ensemble base schématique. Par exemple, son nombre de Lelong $\nu(T_{|L|}, x)$ en un $x \in X$ n'est autre que

$$mult_x|V| := \min\{\nu(E, x), E \in |V|\},$$

qu'on appelle la multiplicité du système linéaire $|V|$ en $x$. Ainsi, $T_{|V|}$ est lisse ssi $|V|$ est sans point base. La résolution des singularités de $T_{|V|}$ s'obtient en éclatant $X$ de façon à rendre l'ensemble base schématique divisoriel, i.e. en choisissant une suite d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que $\mu^\star|L| = |M| + F$, où $|M|$ est la partie mobile, qui n'a plus de point base, et $F$ est la partie fixe. On a alors $\mu^\star T_{|L|} = T_{|M|} + [F]$, et $T_{|M|}$ est lisse.

**Remarque :** lorsque $L$ est un fibré en droites gros, $h^0(kL)$ est non-nul pour tout $k$ assez grand, et on peut donc définir le courant positif $T_{|kL|}$. Il est important de noter que ce dernier n'est pas un courant kählerien en général. Par exemple, si $\pi : \widetilde{X} \to X$ désigne l'éclatement de $X$ en un point et $A$ est un fibré ample sur $X$, $L := \pi^\star A$ est un fibré gros et semi-ample, i.e. $kL$ est engendré par ses sections pour $k$ assez grand. Ainsi $T_{|kL|}$ est un courant lisse, et il n'est jamais kählerien car un courant kählerien lisse est une forme kählerienne, et $c_1(kL)$ ne contient pas de forme kählerienne puisque $L$ n'est pas ample.

Réciproquement, on peut produire des sections à partir d'un courant en utilisant les estimées $L^2$ pour l'opérateur $\overline{\partial}$, par exemple sous la forme du théorème d'annulation de Nadel. Rappelons la

**Définition 2.2.1** *Si $T$ est un $(1,1)$-courant presque positif fermé sur une variété complexe $X$, on définit son idéal multiplicateur $\mathcal{I}(T)$ comme le faisceau des germes de fonctions holomorphes $g \in \mathcal{O}_x$ telles que $|g|^2 e^{-2\varphi}$ soit intégrable sur un voisinage de $x$, pour un (et donc tout) potentiel local $\varphi$ de $T$ en $x$.*

Ce faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(T)$ ne dépend de $T$ qu'à équivalence des singularités près. On peut montrer que $\mathcal{I}(T)$ est un faisceau cohérent (cf. [Dem96]), et le théorème d'annulation de Nadel s'énonce comme suit :

**Théorème 2.2.2** *Soit $X$ une variété kählerienne, $L$ un fibré en droites gros et $T \in c_1(L)$ un courant kählerien. Alors*

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(T)) = 0$$

*pour tout* $q > 0$.

En particulier, l'application de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}(K_X + L)) \to H^0(V(\mathcal{I}(T)), \mathcal{O}(K_X + L))$$

au schéma $V(\mathcal{I}(T))$ est surjective. Ceci permet de produire des sections de $K_X + L$ en conjonction avec le résultat suivant :

**Proposition 2.2.3 (lemme de Skoda)** *Si* $\nu(T, x) < 1$, *alors* $\mathcal{I}(T)_x = \mathcal{O}_x$. *Si* $\nu(T, x) \geq n + s$, *on a* $\mathcal{I}(T)_x \subset \mathcal{M}_x^{s+1}$.

### 2.2.2 Régularisation des courants, reprise

On va donner dans cette partie une version explicite du théorème 1.2.10 d'approximation par des courants à singularités analytiques, dans le cadre suivant : soit $T$ un courant positif fermé représentant la première classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré en droites $L$ sur une variété projective $X$. Comme on l'a vu, un tel courant $T$ peut s'écrire comme le courant de courbure d'une métrique hermitienne singulière $h_L$ sur $L$, et nous allons montrer que l'on peut obtenir des régularisations $T_k$ de $T$ à singularités analytiques sous la forme $T_k = \frac{1}{k}T_{|V_k|}$, où $V_k$ est le sous-système linéaire de $kL + A$ formé des sections $L^2$ relativement à $h_L^{\otimes k}$.

Plus précisément, soit $(A, h_A)$ un fibré en droites ample muni d'une métrique hermitienne lisse dont la forme de courbure $\omega := \Theta_{h_A}(A)$ est définie positive. La forme $\omega$ munit donc $X$ d'une métrique kählerienne. Si $L$ est un fibré en droites sur $X$ et $T$ est un courant positif fermé dans $c_1(L)$, qu'on a écrit $T = \Theta_{h_L}(L)$ pour une métrique hermitienne singulière $h_L$ sur $L$, on peut munir $kL + A$ de la métrique singulière $h_L^{\otimes k} \otimes h_A$. On définit alors un produit hermitien sur $V_k := H^0(X, \mathcal{O}(kL + A) \otimes \mathcal{I}(kT))$ associé à la norme $L^2$ :

$$||\sigma||_k^2 := \int_X h_L^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma) dV_\omega.$$

Ceci muni $\mathbf{P}(V_k)$ d'une métrique de Fubini-Study, et on obtient un courant positif fermé $T_{|V_k|}$ associé (qui correspond à une base orthonormée de $V_k$ pour le produit $L^2$). Posons enfin $T_k := \frac{1}{k}(T_{|V_k|} - \omega)$, de sorte que $T_k$ est un courant presque positif à singularités analytiques qui représente $c_1(L) = \{T\}$. On montre alors le

**Théorème 2.2.4** *On peut choisir* $(A, h_A)$ *à courbure suffisamment positive pour que les propriétés suivantes aient lieu pour tout choix de* $(L, h_L)$ :
*(i)* $T_k \geq -\frac{1}{k}\omega$.
*(ii)* $T_k$ *converge faiblement vers* $T$.

*(iii) $T_k$ est moins singulier que $T$, et les nombres de Lelong $\nu(T_k, x)$ convergent vers $\nu(T, x)$, uniformément par rapport à $x \in X$.*

**Démonstration** : On fixe une métrique lisse $h_\infty$ sur $L$, et l'on écrit $h_L = h_\infty e^{-2\varphi}$, de sorte que $T = \Theta_{h_L}(L) = \Theta_\infty(L) + dd^c\varphi$. On pose

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{2k}\log(\sum_{1\leq i\leq N_k} h_\infty^{\otimes k}\otimes h_A(\sigma_i^{(k)}(x)))$$

pour un choix de base orthonormée $(\sigma_i^{(k)})_{1\leq i\leq N_k}$ de $(V_k, ||\cdot||_k)$. $\varphi_k$ ne dépend pas du choix de cette base ; en fait, $e^{2k\varphi_k(x)}$ est le carré de la norme de l'opérateur d'évaluation en $x$ $V_k \to (kL+A)_x$, où $(kL+A)_x$ est muni de la norme $h_\infty^{\otimes k}\otimes h_A$. Par construction, on a

$$\frac{1}{k}T_{|V_k|} = \Theta_\infty(L) + \frac{1}{k}\omega + dd^c\varphi_k,$$

On invoque le (difficile) théorème d'extension $L^2$ d'Ohsawa-Takegoshi sous la forme suivante :

**Lemme 2.2.5** *Si $(A, h_A)$ est suffisamment positif, alors il existe une constante $C > 0$ avec la propriété suivante : pour tout fibré en droite $G$ muni d'une métrique hermitienne singulière $h_G$ à courant de courbure positif, et pour tout point $x \in X$ tel que $h_G(x) \neq 0$, il existe une section $L^2$ $\sigma$ de $A + G$ muni de la métrique $h_A \otimes h_G$ telle que $||\sigma|| \leq C|\sigma(x)|$.*

On fixe alors $(A, h_A)$ et $C > 0$ comme dans le lemme, qu'on applique bien sûr à $(G, h_G) = (kL, h_L^{\otimes k})$. Soit $x \in X$ tel que $h_L(x) \neq 0$ ; comme $h_L = h_\infty e^{-2\varphi}$, on obtient une section $\sigma$ de $kL + A$ telle que $h_\infty^{\otimes k}\otimes h_A(\sigma(x))e^{-2k\varphi(x)} = 1$ et $||\sigma||_k \leq C$. Comme $e^{2k\varphi_k}$ est le carré de la norme de l'opérateur d'évaluation en $x$ avec $h_\infty^{\otimes k}\otimes h_A$ comme norme à l'arrivée, il vient que

$$e^{2k\varphi(x)} = h_\infty^{\otimes k}\otimes h_A(\sigma(x))||\sigma||_k^2 \leq C^2 e^{2k\varphi_k},$$

et donc l'estimée

$$\varphi(x) \leq \varphi_k(x) + O(1/k)$$

uniforme en $x \in X$. Cette inégalité reste bien sûr valable lorsque $h_L(x) = 0$, i.e. lorsque $\varphi(x) = -\infty$. En particulier, $\varphi_k$ est moins singulière que $\varphi$, et donc $\nu(\varphi_k, x) \leq \nu(\varphi, x)$ en tout point.
On obtient une inégalité dans l'autre direction de façon beaucoup plus élémentaire. On recouvre $X$ par un nombre fini d'ouverts de cartes $U_j$ isomorphes à la

boule unité de $\mathbf{C}^n$, sur lesquels les fibrés $A$ et $L$ se trivialisent ; le recouvrement $U_i$ peut être choisi de façon que les boules $V_i \subset\subset U_i$ de rayon moitié recouvrent encore $X$. On travaille sur un des $U_i$, qu'on identifie à la boule unité $B$ de $\mathbf{C}^n$. Comme $A$ et $L$ sont trivialisés sur $B$, on peut écrire $h_A(v) = |v|^2 e^{-2\psi_A}$ et $h_\infty(w) = |w|^2 e^{-2\psi_\infty}$, où $\psi_A$ et $\psi_L$ sont des poids lisses. On a donc $h_\infty^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma(x)) = |\sigma(x)|^2 e^{-2k\psi_L(x)-2\psi_A(x)}$ sur $B$. Comme $|\sigma|^2$ est une fonction psh sur la boule $B$, l'inégalité de la moyenne donne

$$|\sigma(x)|^2 \leq \frac{n!}{(\pi r^2)^n} \int_{B(x,r)} |\sigma(z)|^2 dz$$

pour tout $x \in V_i = B_{1/2}$ et tout rayon $r < 1/2$, et donc une inégalité

$$h_\infty^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma(x)) \leq \frac{C_2 e^{kC_\infty(x,r)+C_A(r)}}{r^{2n}} \int_{B(x,r)} h_\infty^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma) dV_\omega,$$

où $C_\infty(x,r)$ et $C_A(x,r)$ sont l'oscillation de $\psi_\infty$ et $\psi_A$ sur la boule $B(x,r)$, pour $r < 1/2$ et $x \in V_i$. On remarque enfin que

$$\int_{B(x,r)} h_\infty^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma) dV_\omega \leq (\sup_{B(x,r)} e^{2k\varphi}) \int_{B(x,r)} h_L^{\otimes k} \otimes h_A(\sigma) dV_\omega \leq (\sup_{B(x,r)} e^{2k\varphi}) ||\sigma||_k^2.$$

Comme $e^{2k\varphi_k}$ est le carré de la norme de l'évaluation, il vient

$$e^{2k\varphi_k} \leq \frac{C_2 e^{kC_\infty(x,r)+C_A(x,r)}}{r^{2n}} \sup_{B(x,r)} e^{2k\varphi},$$

ou encore

$$\varphi_k(x) \leq \sup_{B(x,r)} \varphi + C_\infty(x,r) + O(1/k),$$

où l'estimée est uniforme en $x \in X$. Cette inégalité implique que $\nu(\varphi,x) \leq \nu(\varphi_k,x) + O(1/k)$, comme on le voit en divisant par $\log r$ et en utilisant que

$$\nu(\psi,x) = \lim_{r\to 0} (\sup_{B(x,r)} \psi)/\log r$$

pour toute fonction psh $\psi$. Comme on a aussi $\nu(\varphi_k,x) \leq \nu(\varphi,x)$, ceci démontre le point (iii).
Par ailleurs, en appliquant l'inégalité à $r = 1/k$ par exemple et en utilisant la semi-continuité de $\varphi$, il vient $\limsup_{k\to\infty} \varphi_k \leq \varphi$, car l'oscillation $C_\infty(x,r)$ de $\psi_\infty$ sur $B(x,r)$ tend bien sûr vers 0 . Comme on a aussi $\varphi \leq \liminf_{k\to\infty} \varphi_k$ d'après ce qui précède, on en déduit que $\varphi_k$ converge ponctuellement vers $\varphi$. Les propriétés d'uniforme intégrabilité des fonctions psh implique que $\varphi_k$ converge aussi vers $\varphi$ dans $L^1_{loc}$, et donc que $T_k$ converge faiblement vers $T$. Qed.

### 2.2.3 Multiplicités minimales d'un fibré en droites

Le résultat précédent permet d'approcher les singularités de type analytique d'un courant dans $c_1(L)$ par celles des ensembles base de systèmes linéaires associés. Nous allons illustrer son utilisation en démontrant la

**Proposition 2.2.6** *Si $L$ est un fibré en droites gros sur une variété projective, on a*

$$\nu(c_1(L),x) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|kL|$$

*pour tout $x \in X$.*

**Démonstration** : notons tout d'abord que la suite $mult_x|kL|$ des multiplicités en $x$ est clairement sous-additive, de sorte que $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|kL|$ existe et vaut aussi $\inf_{k>0}\frac{1}{k}mult_x|kL|$. Si $D$ est un élément de $|kL|$, $\frac{1}{k}[D]$ est un courant positif fermé dans $c_1(L)$, de sorte que $\frac{1}{k}\nu(D,x) \geq \nu(T_{\min,\varepsilon},x)$ pour tout courant à singularités minimales dans $c_1(L)[-\varepsilon\omega]$. On a donc $\nu(c_1(L),x) \leq \frac{1}{k}mult_x|kL|$, et $\nu(c_1(L),x)$ est plus petit que la limite considérée (ceci est bien sûr valable dès que $L$ est pseudoeffectif). Pour montrer l'inégalité réciproque, rappelons tout d'abord que les multiplicités minimales de $c_1(L)$ sont ici les nombres de Lelong d'un courant positif à singularités minimales $T$ dans $c_1(L)$, puisque cette dernière est grosse. En appliquant le théorème 2.2.4 à ce courant $T$, on obtient un système linéaire
$V_k := H^0(X,\mathcal{O}(kL+A)\otimes\mathcal{I}(kT))$ tel que les nombres de Lelong de $\frac{1}{k}T_{|V_k|}$ convergent vers ceux de $T$. Comme $|V_k|$ est contenu dans $|kL+A|$, la multiplicité $mult_x|kL+A|$ est inférieure à $mult_x|V_k| = \nu(T_{|V_k|},x)$, donc à la limite :

$$\nu(T,x) \geq \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|kL+A|.$$

Mais $L$ étant gros, on va pouvoir absorber le fibré ample $A$ dans $kL$. En effet, le lemme de Kodaira dit qu'il existe $k_0 \gg 1$ tel que $k_0L - A =: E$ soit effectif. Le système linéaire $|(k+k_0)L|$ contient donc $|kL+A|+E$, d'où $mult_x|(k+k_0)L| \leq mult|kL+A| + \nu(E,x)$, et à la limite

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|(k+k_0)L| \leq \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|kL+A|.$$

Ceci montre bien l'inégalité réciproque $\nu(c_1(L),x) = \nu(T,x) \geq \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}mult_x|kL|$, qed.

**Remarque :** Il est facile d'étendre ce résultat au cas d'un **R**-diviseur gros $L$, si l'on définit $|kL|$ comme le système linéaire associé à la partie entière $\lfloor kL\rfloor$, définie coefficient par coefficient. Il suffit d'utiliser que $\frac{1}{k}\nu(\alpha_k,x)$ converge vers $\nu(c_1(L),x)$ si $\alpha_k$ désigne la classe de $\lfloor kL\rfloor$.

On peut donner une version qualitative de ce résultat :

**Proposition 2.2.7** *Si $X$ est une variété projective, il existe un fibré ample $A$ tel que, pour tout fibré en droites pseudoeffectif $L$, on ait*

$$L_{nef}(c_1(L)) = \cup_{k\geq 0} B_{|kL+A|}.$$

**Démonstration** : si $\nu(c_1(L),x)>0$, tous les courants $T\geq -\varepsilon\omega$ dans $c_1(L)$ ont un nombre de Lelong positif en $x$ pour $\varepsilon>0$ assez petit, donc en particulier le courant $\frac{1}{k}T_{|kL+A|}-\frac{1}{k}\omega$, où $\omega\in c_1(A)$. Ceci signifie que $T_{|kL+A|}$ a un pôle en $x$ pour $k$ assez grand, donc que $x\in B_{|kL+A|}$. Pour montrer la réciproque, on choisit un fibré très ample $B$, et on va montrer que tout fibré ample $A$ tel que $A-(K_X+(n+1)B)=: C$ soit ample convient. Soit $x$ un point nef de $L$. Puisque $B$ est très ample, il existe un courant kählerien $T_B$ dans $c_1(B)$ avec une singularité isolée en $x$ et tel que $\nu(T_B,x)\geq 1$. Le fibré $C$ étant ample, on peut choisir une forme kählerienne $\omega$ dans $c_1(C)$ ; puisque $\nu(c_1(L),x)=0$, pour tout $k>0$ assez grand, il existe un courant $T_k\geq -\frac{1}{k}\omega$ dans $c_1(L)$ qui est lisse au voisinage de $x$. Le courant $kT_k+\omega+(n+1)T_B$ est alors un courant kählerien dans $kc_1(L)+C+(n+1)B$, i.e. dans la première de Chern de $(kL+A)-K_X$, avec une singularité isolée en $x$ de nombre de Lelong au moins $n+1$, et il résulte donc du lemme de Skoda et du théorème d'annulation de Nadel que $kL+A$ admet une section ne s'annulant pas en $x$, qed.

Si l'on désigne par $B_{||L||}:=\cap_{k>0}B_{|kL|}$ l'ensemble base asymptotique d'un $\mathbf{Q}$-fibré $L$, on peut finalement réinterpréter les lieux non nefs et non kähleriens de la façon suivante, dans l'esprit de [Nak00] :

**Corollaire 2.2.8** *Si $L$ est un fibré pseudoeffectif et $A$ est un fibré ample, le lieu non nef de $\alpha := c_1(L)$ vérifie :*

$$L_{nef}(\alpha) = \cup_{\varepsilon>0} B_{||L+\varepsilon A||}.$$

*Si $L$ est de plus gros, alors le lieu non kählerien de $\alpha$ est :*

$$L_{kah}(\alpha) = \cap_{\varepsilon>0} B_{||L-\varepsilon A||}.$$

Le premier point résulte immédiatement de la proposition précédente, et le second découle des inclusions

$$L_{nef}(c_1(L-\varepsilon A))\subset B_{||L-\varepsilon A||}\subset L_{kah}(c_1(L-\varepsilon A)),$$

en remarquant que $L_{kah}(\alpha)=\cap_{\varepsilon>0}L_{nef}(\alpha-\varepsilon\omega)$ pour toute classe grosse $\alpha$ et toute classe kählerienne $\omega$.

On peut alors réinterpréter le résultat principal de [Nak00] dans ce langage :

**Théorème 2.2.9 (Nak00)** *Si $\alpha = c_1(L)$ avec $L$ un fibré nef et gros, alors le lieu non kählerien de $\alpha$ est la réunion des sous-ensembles irréductibles $Y$ de $X$ tels que $\int_Y \alpha^p = 0$, avec $p=\dim Y$.*

### 2.2.4 Décomposition de Zariski d'un diviseur

On peut énoncer le problème de la décomposition de Zariski comme ceci : soit $X$ une variété projective, et $L$ un diviseur sur $X$. On demande s'il est possible de trouver deux $\mathbf{R}$-diviseurs $P$ et $N$ tels que :
(i) $L = P + N$
(ii) $P$ est nef,
(iii) $N$ est effectif,
(iv) l'inclusion canonique $H^0(X, \lfloor kP \rfloor) \to H^0(X, kL)$ est un isomorphisme pour tout $k > 0$.
Bien sûr, ceci ne se produit que quand $L$ est pseudoeffectif. Si $N$ (et donc $P$) peut être choisi rationnel, on dit que $L$ admet une décomposition de Zariski sur $\mathbf{Q}$.

**Théorème 2.2.10** *Soit $L$ un diviseur gros sur $X$, soit $N(L)$ la partie négative de la classe $\{L\}$ et $P(L) := L - N(L)$. Alors $L = P(L) + N(L)$ est l'unique décomposition $L = P + N$ de $L$ en la somme d'un $\mathbf{R}$-diviseur $P$ nef en codimension 1 et d'un $\mathbf{R}$-divieur effectif $N$ telle que l'inclusion naturelle $H^0(\lfloor kP \rfloor) \to H^0(kL)$ soit un isomorphisme pour tout $k > 0$.*

**Démonstration** : vérifions d'abord que $H^0(X, kL) = H^0(X, \lfloor kP(L) \rfloor)$. Si $E$ est un diviseur effectif linéairement équivalent à $kL$, on veut voir que $E \geq \lceil kN(L) \rceil$. Mais $\frac{1}{k}[E]$ est un courant positif dans la classe $\{L\}$, donc $E \geq kN(L)$, et aussi $E \geq \lceil kN(L) \rceil$ puisque $E$ est à coefficients entiers.
Réciproquement, on se donne une décomposition $L = P + N$ comme dans le théorème 2.2.10. On veut vérifier que $N = N(L)$, i.e. $\nu(\{L\}, D) = \nu(N, D)$ pour tout diviseur irréductible $D$. Or l'hypothèse $H^0(X, kL) = H^0(X, \lfloor kP \rfloor)$ signifie précisément que pour tout $E \in |kL|$ on a $E \geq \lceil kN \rceil$, et donc $mult_x|kL| \geq \sum \frac{\lceil ka_j \rceil}{k} \nu(D_j, x)$ si on a écrit la décomposition en composantes irréductibles $N = \sum a_j D_j$. On déduit de ceci l'inégalité

$$\nu(\{L\}, D) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} mult_x|kL| \geq \sum a_j \nu(D_j, x) = \nu(N, x),$$

et *a fortiori* $\nu(\{L\}, D) \geq \nu(N, D)$. Pour obtenir l'autre inégalité, on remarque que

$$\nu(\{L\}, D) \leq \nu(\{P\}, D) + \nu(\{N\}, D) \leq \nu(N, D)$$

car $\nu(\{N\}, D) \leq \nu(N, D)$ et $\nu(\{P\}, D) = 0$ puisque $\{P\}$ est nef en codimension 1. La preuve est terminée.

**Corollaire 2.2.11 (Critère de Cutkosky)** *Si $L$ est un diviseur gros sur $X$ dont l'une des multiplicités $\nu(\{L\}, D)$ est irrationnelle, alors il ne peut exister de modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que $\mu^\star L$ admette une décomposition de Zariski définie sur $\mathbf{Q}$.*

**Démonstration** : si une telle modification existe, $N(\mu^\star L)$ doit être rationnel, et $N(L) = \mu_\star N(\mu^\star L)$ aussi, contradiction.

# Chapitre 3

# Volume et nombres d'intersections mobiles

## 3.1 Volume d'un fibré en droites

Soit $X$ une variété projective de dimension $n$, et $L$ un fibré en droites sur $X$. On définit son volume par

$$v(L) := \limsup_{k \to +\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, kL).$$

Par définition, le fibré $L$ est gros ssi $v(L) > 0$. Le volume $v(L)$ est un invariant qui mesure la positivité de $L$ d'un point de vue birationnel.
On peut montrer que la lim sup dans la définition du volume est une limite lorsque $L$ est gros (cf. [DEL00]) ; en particulier, on voit que $v(kL) = k^n v(L)$ pour tout entier $k > 0$, de sorte que l'on peut définir le volume d'un **Q**-fibré en droites $L$ en posant $v(L) = k^{-n} v(kL)$ pour $k > 0$ tel que $kL$ soit Cartier. Si $A$ est un fibré en droites ample sur $X$, le théorème d'annulation de Serre implique que $h^q(kA) = 0$ pour tout $q > 0$ si $k \gg 1$, et le théorème de Riemann-Roch asymptotique dit que $\chi(X, \mathcal{O}(kA)) = A^n \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1})$. On en déduit que le volume du fibré ample $A$ est $v(A) = A^n$. En particulier, $v(A)$ ne dépend que de la première classe de Chern de $A$. C'est encore vrai en général :

**Proposition 3.1.1** *Le volume $v(L)$ d'un fibré $L$ ne dépend que de $c_1(L)$.*

**Démonstration** : soit $T$ un courant kählerien à singularités analytiques dans $\alpha := c_1(L)$, et $x \in X$ un point tel que $\nu(T, x) = 0$. On construit alors un courant kählerien $\widetilde{T} = T + \varepsilon dd^c \theta(z) \log |z - x|$, $0 < \varepsilon \ll 1$, avec un pôle isolé en $x$, en choisissant une fonction tronquante lisse $\theta$ près de $x$. Si $\tau$ est un représentant lisse de $c_1(K_X)$, on pose alors $T_k := kT - \tau$. On fixe $k_0$ assez grand, de sorte que $T_{k_0}$ est un courant kählerien dans $k_0\alpha - c_1(K_X)$ tel que $x$ soit isolé dans $V(\mathcal{I}(T_{k_0}))$ et $\mathcal{I}(T_{k_0})_x \subset \mathcal{M}_x$. D'après le théorème d'annulation de Nadel, pour tout fibré $G$ tel que $c_1(G) = k_0\alpha$, on trouve donc une section de $G$ qui ne s'annule pas en $x$. En particulier, un tel $G$ est effectif. Soit maintenant $L'$ un fibré tel que $c_1(L') = c_1(L)$, et posons $E = L' - L$. On a alors

$$kL' = kL + kE = (k - k_0)L + (k_0L + kE).$$

Comme $c_1(k_0L + kE) = k_0\alpha$, $k_0L + kE$ est effectif, et l'on a donc $h^0(kL') \geq h^0((k - k_0)L)$. Ceci implique bien sûr que $v(L') \geq v(L)$, et l'on conclut par symétrie.

On se pose donc la question suivante : peut-on trouver une formule exprimant $v(L)$ en fonction de $c_1(L)$ ?
Si $L$ admet une décomposition de Zariski $L = P + N$, alors on a $v(L) = v(P)$, et le volume du fibré nef $P$ est juste $P^n$ (cf. plus loin). Malheureusement, un fibré en droites $L$ n'admet pas nécessairement une décomposition de Zariski. Toutefois, T.Fujita a montré dans [Fuj94] l'existence d'une décomposition de Zariski approchée, au moins en ce qui concerne le volume (cf. aussi [DEL00) :

**Théorème 3.1.2** *Soit $L$ un fibré en droites gros sur une variété projective $X$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ et une décomposition $\mu^\star L = A_\varepsilon + E_\varepsilon$ telle que :*
*(i) $A_\varepsilon$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample, $E_\varepsilon$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif.*
*(ii)* $|v(L) - v(A_\varepsilon)| < \varepsilon$. Notre objectif va être de traduire ce résultat en termes de courants dans $c_1(L)$, afin de pouvoir passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Pour ce faire, nous aurons besoin de la décomposition de Lebesgue d'un courant.

### 3.1.1 Décomposition de Lebesgue d'un courant

Un courant positif $T$ sur une variété complexe $X$ est un courant d'ordre 0, i.e. à coefficients mesures. Chacune de ces mesures admet une décomposition de Lebesgue, i.e. s'écrit de façon unique comme la somme d'une mesure absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'une mesure singulière. On obtient donc une décomposition de Lebesgue pour un $T$ lui-même :

$$T = T_{ac} + T_{sing}.$$

D'après le théorème de Radon-Nikodym, la partie absolument continue $T_{ac}$ de $T$ est (le courant associé à) une forme à coefficients $L^1_{loc}$. On peut donc considérer $T_{ac}(x)^k$ pour presque tout $x$, mais on obtient juste une forme borélienne. Enfin, si $T$ est un courant positif, $T_{ac}$ et $T_{sing}$ sont positifs ; on en déduit que $T_{ac} \geq \gamma$ et $T_{sing} \geq 0$ dès que $T \geq \gamma$ pour une forme $L^1_{loc}$ $\gamma$.
Par contre, la décomposition de Lebesgue ne préserve pas la propriété d'être

fermé.

**Exemple :** Soit $\log^+|z| := \max(\log|z|, 0)$ pour $z \in \mathbf{C}^n$. Ceci définit une fonction psh sur $\mathbf{C}^n$, et l'on pose $T := dd^c \log^+|z|$. $T$ est un courant positif fermé, lisse en dehors de la boule unité fermée $\overline{B} \subset \mathbf{C}^n$, et nul sur $B^0$, donc sa partie absolument continue est $T_{ac} = \chi_U T$, où $U = X - \overline{B}$ et $\chi_U$ est sa fonction caractéristique. $dd^c \log|z| - T_{ac}$ est donc un courant positif à support dans le compact $\overline{B}$. On utilise alors le

**Lemme 3.1.3** *Soit $S$ un courant positif fermé de bidimension $(p,p)$ avec $p \geq 1$ sur une variété de Stein $X$. Si $S$ est à support compact, $S$ est nul.*

**Démonstration** : si $\psi$ est une fonction d'exhaustion lisse strictement psh de $X$, le théorème de Stokes implique que $\int_X S \wedge (dd^c\psi)^p = \int_X dd^c S \wedge (dd^c\psi)^{p-1} = 0$ (car $S$ est $d$-fermé), et donc $S = 0$ car $dd^c\psi$ est une $(1,1)$-forme définie positive.

Ainsi, si $n \geq 2$, $T_{ac}$ n'est pas fermé ; autrement, on aurait $T \geq T_{ac} = dd^c \log|z|$, ce qui est absurde puisque $dd^c \log|z|$ est non nul sur $B^0$.

Lorsque $T$ est un $(1,1)$-courant fermé à singularités analytiques, cette pathologie ne se produit pas. En fait, on a la

**Proposition 3.1.4** *Si $T$ est un $(1,1)$-courant fermé à singularités analytiques, sa décomposition de Lebesgue coincide avec sa décomposition de Siu*

**Démonstration** : soit $R$ la partie résiduelle de $T$ dans sa décomposition de Siu. $R$ est à singularités analytiques le long d'un ensemble analytique $A$ de codimension au moins 2, donc est lisse en dehors de $A$ et ne charge pas $A$. On en déduit immédiatement que $R$ est absolument continu ; comme la partie divisorielle $\sum \nu(T,D)[D]$ de $T$ est singulière, le résultat suit.

La partie absolument continue $T_{ac}$ d'un courant $T$ ne dépend pas continûment de $T$, mais l'on a le résultat de semi-continuité suivant :

**Proposition 3.1.5** *Soit $T_k$ une suite de $(1,1)$-courants positifs fermés convergeant faiblement vers $T$. Alors on a :*

$$T_{ac}(x)^n \geq \limsup T_{k,ac}(x)^n$$

*pour presque tout $x \in X$.*

**Démonstration** : soit $\omega$ une forme hermitienne fixée. Pour chaque $(1,1)$-forme positive $\alpha$, on note $\det(\alpha)$ le déterminant de $\alpha$ relativement à $\omega$, i.e. $\det(\alpha(x)) = \alpha(x)^n/\omega(x)^n$. Le résultat étant local, on peut introduire un noyau régularisant $(\rho_j)$. Puique $T_k \geq T_{k,ac}$, on a

$$\det(T_k \star \rho_j)^{1/n} \geq \det(T_{k,ac} \star \rho_j)^{1/n}.$$

La concavité de la fonction $A \mapsto \det(A)^{1/n}$ sur le cône convexe des matrices hermitiennes positives montre alors que

$$\det(T_{k,ac} \star \rho_j)^{1/n} \geq \det(T_{k,ac})^{1/n} \star \rho_j.$$

Puisque qu'une convolution contre une fonction lisse transforme une convergence faible en une convergence dans $C^\infty$, le lemme de Fatou implique que

$$\det(T\star\rho_j)^{1/n}\geq(\liminf_{k\to\infty}\det(T_{k,ac})^{1/n})\star\rho_j.$$

Maintenant, on a par le théorème de densité de Lebesgue $T\star\rho_j\to T_{ac}$ a.e., et donc

$$\det(T_{ac})^{1/n}\geq\liminf_{k\to\infty}\det(T_{k,ac})^{1/n}.$$

Enfin, on peut changer la lim inf en une lim sup en choisissant des sous-suites appropriées ponctuellement.
Nous aurons également besoin des faits suivants :

**Proposition 3.1.6** *Soit $f:X\to Y$ un morphisme surjectif propre. Si $\alpha$ est une forme de bidimension $(p,p)$ localement intégrable sur $Y$, alors le courant poussé en avant $f_\star\alpha$ est absolument continu, donc une forme localement intégrable de bidimension $(p,p)$. En particulier, lorsque $T$ est un courant positif sur $Y$, le courant $f_\star(T_{ac})$ est absolument continu et l'on a la formule*

$$f_\star(T_{ac})=(f_\star T)_{ac}.$$

**Démonstration** : $f_\star\alpha$ ne charge pas l'ensemble critique $C$ de $f$ puisque $\alpha$ n'a pas de masse sur l'ensemble analytique $f^{-1}(C)$, qui est de mesure nulle. Il suffit donc de montrer que $f_\star\alpha$ est absolument continue sur $X-C$. Puisque $f_\star$ est additif, on peut se ramener en utilisant une partition de l'unité au cas où $\alpha$ est à support compact dans un petit ouvert $U$ centré en un point régulier de $f$ ; on peut trouver des coordonnées $z=(z',z'')$ sur $U=U'\times U''$ telles que $f:U\to U'$ s'écrive $f(z)=z'$ ; mais alors $f_\star\alpha$ est la forme $z'\mapsto\int_{z''\in U'}\alpha(z',z'')$, qui est localement intégrable par Fubini.

### 3.1.2 Régularisation avec contrôle de la partie absolument continue.

On aura besoin par la suite des versions suivantes des théorèmes de régularisation des courants, qui prennent en compte la partie absolument continue. Dans la suite, $(X,\omega)$ désigne une variété complexe compacte munie d'une métrique hermitienne. On cite d'abord le résultat suivant :

**Théorème 3.1.7 (Dem82)** *Soit $T=\theta+dd^c\varphi$ un $(1,1)$-current presque positif fermé, avec $\theta$ lisse. Soit aussi $\gamma$ une $(1,1)$-forme continue avec $T\geq\gamma$. Alors il existe une suite $\varphi_k$ décroissant ponctuellement vers $\varphi$, et telle que $T_k:=\theta+dd^c\varphi_k$ vérifie :*
*(i) $T_k\to T$ faiblement et $T_{k,ac}(x)\to T_{ac}(x)$ p.p.,*

*(ii) $T_k \geq \gamma - C\lambda_k\omega$, où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de $(X, \omega)$, et $\lambda_k$ est une suite de fonctions continue qui décroît ponctuellement vers $\nu(T, x)$.*

Pour ce qui est de la régularisation avec singularités analytiques, nous allons montrer le

**Théorème 3.1.8** *Les données étant les mêmes que dans le théorème 3.1.7, il existe une suite $\varphi_k$ de fonctions à singularités analytiques décroissant vers $\varphi$ telle que $T_k := \theta + dd^c\varphi_k$ vérifie :*
*(i) $T_k \to T$ faiblement et $T_{k,ac}(x) \to T_{ac}(x)$ p.p.*
*(ii) $T_k \geq \gamma - \varepsilon_k\omega$, où $\varepsilon_k > 0$ est une suite convergeant vers zéro.*
*(iii) Les nombres de Lelong $\nu(T_k, x)$ convergent vers $\nu(T, x)$ uniformément par rapport à $x \in X$.*

**Démonstration** : on choisit une suite $T_k^{(1)} = \theta + dd^c\varphi_k^{(1)}$ de formes lisses donnée par le théorème 3.1.7, et une suite $T_k^{(2)} = \theta + dd^c\varphi_k^{(2)}$ de courants à singularités analytiques donnée par le théorème 1.2.10, qui satisfait donc l'énoncé, hormis l'assertion sur la partie absolument continue . On va recoller ces deux suites en une troisième $T_k^{(3)} = \theta + dd^c\varphi_k^{(3)}$ qui satisfait l'ensemble de l'énoncé.
Soit $A_k$ l'ensemble analytique le long duquel $\varphi_k^{(2)}$ est singulière. On choisit une suite quelconque $C_k > 0$ croissant vers $+\infty$, et une suite $\delta_k > 0$ décroissant vers 0. Remarquons que

$$U_k := \{\varphi_k^{(2)} < -(C_k + 1)/\delta_k\}$$

est un voisinage ouvert de $A_k$ sur lequel on a $\varphi_k^{(2)} < (1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)} - C_k - 1/2$, de sorte que

$$\varphi \leq \varphi_k^{(2)} < (1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)} - C_k - 1/2$$

sur le compact $\overline{U}_k$. Puisque $\varphi_k^{(1)}$ est continue et décroît vers $\varphi$, on a

$$\varphi_{j_k}^{(1)} < (1 - \delta_k)\varphi_k - C_k - 1/2$$

sur $\overline{U}_k$ pour $j_k$ assez grand. On choisit maintenant un voisinage ouvert $W_k \subset\subset U_k$ de $A_k$, et l'on pose :

$$\varphi_k^{(3)} := \begin{cases} (1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)} - C_k & \text{sur } U_k, \\ \max_\eta((1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)} - C_k, \varphi_{j_k}^{(1)}) & \text{sur } X - W_k \end{cases}$$

où $\max_\eta(x, y) := \max \star \rho_\eta$ est une fonction maximum régularisée par convolution avec un noyau régularisant $\rho_\eta$, et $\eta$ est choisi assez petit pour que $\max_\eta(x, y) = x$ quand $y < x - 1/2$. Les deux parties à recoller coincident sur un voisinage de $\partial U_k$, et la propriété de recollement des fonctions psh montre que $\varphi_k^{(3)}$ est presque psh ; elle est à singularités analytiques puisqu'elle coincide avec $\varphi_k^{(2)}$ près de ses pôles. Il est aussi clair que $\varphi_k^{(3)}$ converge vers $\varphi$, puisque c'est le cas de $\varphi_k^{(1)}$ et $\varphi_k^{(2)}$. Montrons maintenant que $T_k^{(3)} := \theta + dd^c\varphi_k^{(3)}$ satisfait le point (i). Puisque $\varphi_k^{(3)}$ converge vers $\varphi$, $T_k^{(3)} \to T$ est automatique. En ce qui concerne la seconde assertion, notons que si $\varphi(x) > -\infty$, alors $x$ ne peut se trouver dans tous les $U_k$ pour $k \gg 1$, car autrement $\varphi_k^{(2)}(x) \leq -(C_k + 1)$ pour tout $k \gg 1$, ce qui donnerait à la limite $\varphi(x) = -\infty$ puisque $\varphi_k^{(2)}(x)$ converge vers $\varphi(x)$. De plus, pour un tel $x$, on a

$$(1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)}(x) - C_k < \varphi(x) - 1/2$$

pour $k \gg 1$, puisque $C_k \to +\infty$. Par conséquent, on obtient que $(1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)}(x) - C_k < \varphi_{j_k}^{(1)}(x) - 1/2$, et donc $(1 - \delta_k)\varphi_k^{(2)} - C_k < \varphi_{j_k}^{(1)} - 1/2$ sur un voisinage de $x$ (qui dépend de $k$) contenu dans $X - W_k$, par continuité. On en déduit que $\varphi_k^{(3)} = \varphi_{j_k}^{(1)}$ sur ce voisinage. Au total, on a montré : pour tout $x$ en dehors de l'ensemble polaire de $\varphi$ (qui est de mesure nulle) on a $T_k^{(3)}(x) = T_{j_k}^{(1)}(x)$ pour $k \gg 1$, et ceci implique certainement que $T_k^{(3)}(x) = T_{k,ac}^{(3)}(x) \to T_{ac}(x)$ pour presque tout $x$. On montre maintenant (ii) : la propriété de recollement des fonctions psh montre que $T_k^{(3)} - \gamma$ aura une partie négative convergeant vers 0 quand $k \to +\infty$ si on peut montrer que c'est le cas de $T_{j_k}^{(1)} - \gamma$ sur $X - W_k$. Mais on a $\nu(T_k^{(2)}, x) = 0$ pour $x$ dans cet ensemble, donc $\nu(T, x)$ est uniformément petit pour $x$ dans cet ensemble. Puisque la partie négative de $T_{j_k}^{(1)} - \gamma$ est contrôlée par les nombres de Lelong de $T$, on a le résultat.

### 3.1.3 Contrôle de la masse et transformée stricte d'un courant

Lorsque $T$ est un $(1,1)$-courant positif fermé sur une variété complexe $X$, on peut considérer $(T_{ac})^p$ pour $p \geq 0$, mais cette $(p,p)$-forme borélienne n'est en général pas localement intégrable. Dans [Kis84], C.O.Kiselman construit le contre-exemple suivant :

**exemple** : en notant $z = (z', z'')$ la variable de $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{n-k} \times \mathbf{C}^k$, on considère le $(1,1)$-courant

$$T = dd^c(\varphi + \log|z''|),$$

où

$$\varphi(z) = (|z'|^2 - 1)(-\log|z''|)^\alpha,$$

avec $0 < \alpha < 1$, i.e. $\varphi = \chi(\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\chi(t_1, t_2) = (e^{2t_1} - 1)(-t_2)^\alpha$ et $\varphi_1 = \log|z'|$, $\varphi_2 = \log|z''|$. $\chi$ est une fonction croissante de $t_1$ et $t_2$ au voisinage de $-\infty$, et l'on vérifie aisément en calculant son Hessien qu'elle y est aussi convexe. La fonction $\varphi$ est donc psh, de lieu non borné contenu dans l'ensemble analytique $\{z'' = 0\}$, qui est de codimension $k$, et de même pour la fonction psh $\log|z''|$. D'après le théorème 1.1.1, le courant produit $T^p$ est bien défini pour $p \leq k$, mais on va montrer que le courant $T^{k+1}$, bien défini en dehors de $\{z'' = 0\}$ (car $T$ y est lisse !), est de masse localement infinie au voisinage de 0 pour $1/2 \leq \alpha < 1$. En effet, on a

$$T^{k+1} \geq (dd^c\varphi)^2 \wedge (dd^c \log|z''|)^{k-1},$$

et

$$i\partial\overline{\partial}\varphi = \sum \chi''_{jk} i\partial\varphi_j \wedge \overline{\partial}\varphi_k + \sum \chi'_j i\partial\overline{\partial}\varphi_j$$

donc

$$(i\partial\overline{\partial}\varphi)^2 \geq \sum (\chi''_{jk})^2 i\partial\varphi_j \wedge \overline{\partial}\varphi_k \wedge i\partial\varphi_j \wedge \overline{\partial}\varphi_j \geq (\chi''_{12})^2 i\partial\varphi_1 \wedge \overline{\partial}\varphi_1 \wedge i\partial\varphi_2 \wedge \overline{\partial}\varphi_2.$$

Comme on a $\chi''_{12} = |z'|^2(-\log|z''|)^{\alpha-1}$ à une constante près, on voit finalement que la masse de $(dd^c\varphi)^2 \wedge (dd^c \log|z''|)^{k-1}$ près de 0 dans $\mathbf{C}^n$ est au moins celle de

$$|z'|^4(-\log|z''|)^{2\alpha-2} i\partial\log|z'| \wedge \overline{\partial}\log|z'| \wedge i\partial\log|z''| \wedge \overline{\partial}\log|z''| \wedge (i\partial\overline{\partial}\log|z''|)^{k-1},$$

i.e. à une constante près celle du $(k,k)$-courant positif

$$(-\log|z''|)^{2\alpha-2} i\partial\log|z''| \wedge \overline{\partial}\log|z''| \wedge (i\partial\overline{\partial}\log|z''|)^{k-1}$$

près de 0 dans $\mathbf{C}^k$, qui est infinie d'après le critère de Bertrand si $1/2 \leq \alpha < 1$.

Inversement, les courants à singularités analytiques ne présentent pas ce comportement pathologique :

**Proposition 3.1.9** *Soit $T$ un courant positif fermé à singularités analytiques sur une variété complexe $X$. Alors $T^p_{ac}$ est de masse localement finie pour tout $p$.*

**Démonstration** : on utilise la résolution des singularités (proposition 1.1.5). D'après ce résultat, on peut trouver une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que la partie résiduelle $R$ de $\mu^\star T$ soit lisse. On a alors clairement $\int_U T^p_{ac} \wedge \omega^{n-p} = \int_{\mu^{-1}(U)} R^p \wedge \mu^\star\omega^{n-p}$ pour tout ouvert relativement compact $U \subset X$, ce qui montre le résultat.

Le contre-exemple ci-dessus est valable sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et l'on peut se demander si ce phénomène peut encore se produire sur une variété compacte $X$. Dans le cas compact kählerien, nous allons montrer que la masse reste toujours bornée. La raison en est que l'ensemble des courants positifs fermés de bidegré $(p,p)$ dans une classe de cohomologie donnée est faiblement compact, et ce pour tout $p$ dans le cas kählerien. Ce fait n'est vrai que pour $p=1$ sur une variété complexe compacte quelconque (il existe en effet des exemples de variétés complexes compactes dont l'espace des cycles de Chow-Barlet a au moins une composante non-compacte).

**Théorème 3.1.10** *Soit $X$ une variété compacte kählerienne. Pour tout $(1,1)$-courant positif fermé $T$ et tout $p \geq 0$, la masse de $T_{ac}^p$ est finie, et peut être bornée en fonction de la seule classe de cohomologie $\{T\}$.*

**Démonstration** : on fixe une forme kählerienne $\omega$ sur $X$.

**Lemme 3.1.11** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ une classe de cohomologie pseudo-effective. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\nu(T,x) \leq C$ pour tout courant positif fermé $T \in \alpha$ et tout $x \in X$.*

**Démonstration** : on choisit un recouvrement fini de $X$ par des ouverts de cartes $U_i$ isomorphes à la boule unité $B$ de $\mathbf{C}^n$, tel que les boules de rayon moitié $V_i \subset U_i$ couvrent encore $X$. Si $z^{(i)}$ désigne les coordonnées sur $U_i$, on peut trouver une constante $C_1 > 0$ telle que $\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z^{(i)}|^2 \leq C_1\omega$ sur $V_i$, pour tout $i$. Si $x \in X$ se trouve dans $V_i$, le nombre de Lelong $\nu(T,x)$ est par définition la limite décroissante quand $r$ tend vers 0 de

$$\nu(T,x,r)^{(i)} := \frac{1}{(\pi r^2)^{n-1}} \int_{|z^{(i)}-x|<r} T \wedge (\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z^{(i)}|^2)^{n-1}.$$

On a donc $\nu(T,x) \leq \nu(T,x,1/3)^{(i)} \leq C_1 \int_{|z^{(i)}-x|<1/3} T\wedge\omega^{n-1} \leq C_2 \int_X T\wedge\omega^{n-1}$ pour des constantes $C_1$ et $C_2$ ne dépendant que de $\omega$. Finalement, il reste à remarquer que l'intégrale $\int_X T \wedge \omega^{n-1}$ ne dépend que de la classe de $T$ dans $H_{BC}^{1,1}(X,\mathbf{R})$, puisque $\omega^{n-1}$ est fermée.

On conclut maintenant la preuve du théorème : soit $T_k \in \{T\}$ une suite de formes lisses approchant $T$ comme dans le théorème 3.1.7. Comme la partie négative de $T_k$ est contrôlée par les nombres de Lelong de $T$, on peut d'après le lemme 3.1.11 trouver une constante $C > 0$ ne dépendant que de $\{T\}$ telle que $T_k + C\omega$ soit positive pour tout $k$. Comme $T_k(x)$ converge vers $T_{ac}(x)$ pour presque tout $x$, le lemme de Fatou implique la seconde de ces inégalités :

$$\int_X T_{ac}^p \wedge \omega^{n-p} \leq \int_X (T_{ac} + C\omega)^p \wedge \omega^{n-p} \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X (T_k + C\omega)^p \wedge \omega^{n-p}.$$

Il reste alors à remarquer que $\int_X (T_k + C\omega)^p \wedge \omega^{n-p}$ peut se calculer en cohomologie car toutes les formes sont fermées, et donc ne dépend pas de $k$.

**Remarques** :
(i) si $X$ une variété compacte de Fujiki, il existe une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que $\widetilde{X}$ soit kählerienne. Si $T$ est un $(1,1)$-courant positif fermé sur $X$, on a bien sûr $\int_X T_{ac}^p \wedge \omega^{n-p} = \int_{\widetilde{X}} (\mu^\star T)_{ac}^p \wedge \mu^\star \omega^{n-p}$ pour toute métrique hermitienne $\omega$ sur $X$, et le théorème reste donc valable sur une variété de Fujiki.
(ii) Si $X$ est une surface complexe compacte quelconque, le théorème reste valable comme le montre la démonstration précédente avec $\omega$ une métrique de Gauduchon au lieu d'une forme kählerienne.
(iii) J'ignore si le théorème est valable sur une variété complexe compacte quelconque.

Dans le même ordre d'idée, soit $\Theta$ un courant positif fermé de bidimension $(p,p)$ sur $X$, et soient $T_1, ..., T_q$ des $(1,1)$-courants positifs fermés avec $q \leq p$. Soit $F \subset X$ la réunion de leurs lieux non bornés, de sorte que chaque $T_i$ s'écrit localement $T_i = dd^c u_i$ sur $X - F$, avec $u_i$ une fonction psh localement bornée. D'après Bedford-Taylor [BT76], on peut donc définir le produit $T_1 \wedge ... \wedge T_q \wedge \Theta$ sur $X - F$, qui est un courant positif fermé de bidimension $p - q$. On montre alors le

**Théorème 3.1.12** *Si $X$ une variété kählerienne compacte, le courant*

$$T_1 \wedge ... \wedge T_q \wedge \Theta,$$

*défini sur $X - F$, est de masse finie. On peut de plus borner cette masse en fonction des classes de cohomologie $\{T_i\}$ et $\{\Theta\}$ uniquement.*

**Démonstration** : soit $\omega$ une forme kählerienne sur $X$. Pour alléger les notations, on va supposer que $q = 1$, avec $T_1 = T$. Si on écrit $T = \theta + dd^c\varphi$ avec $\theta$ lisse, alors d'après le théorème 1.2.9, il existe une suite $T_k = \theta + dd^c\varphi_k$ de formes lisses telles que
(i) $\varphi_k$ décroît ponctuellement vers $\varphi$,
(ii) $T_k \geq -C\omega$, avec $C > 0$ ne dépendant que de $(X, \omega)$ et des nombres de Lelong de $T$, donc de $\{T\}$.
D'après [BT76] (cf. aussi [Dem92]), la suite de courants $(T_k + C\omega) \wedge \Theta$ converge faiblement vers $(T + C\omega) \wedge \Theta$ sur $X - F$, puisque la suite des potentiels locaux de $T_k + C\omega$ décroît en tout point vers celui de $T + C\omega$. On choisit maintenant une fonction lisse $\psi$ sur $X - F$, à support compact et telle que $0 \leq \psi \leq 1$. Alors $\int_{X-F} \psi(T + C\omega) \wedge \Theta \wedge \omega^{p-1}$ est la limite de la suite $\int_{X-F} \psi(T_k + C\omega) \wedge \Theta \wedge \omega^{p-1}$, qui est majorée par $\int_X (T_k + C\omega) \wedge \Theta \wedge \omega^{p-1}$. Or cette dernière intégrale se calcule en cohomologie, donc ne dépend que de $\{\omega\}$, $\{T_k\} = \{T\}$ et $\{\Theta\}$, qed.

**Transformée stricte d'un courant**
Si $f : Y \to X$ est un morphisme surjectif, on peut comme on l'a vu définir le tiré en arrière $f^\star T$ d'un $(1,1)$-courant (presque) positif $T$ sur $X$. Ceci n'est plus possible lorsque le (bi)degré de $T$ est $> 1$ en général. Par exemple, soit $\mu : Y \to X$ une modification entre variétés kähleriennes compactes ; il existe un ensemble analytique $A \subset X$ de codimension au moins deux tel que $\mu$ soit un isomorphisme au dessus de $A$. Définir le tiré en arrière $\mu^\star \Theta$ d'un courant positif fermé de bidegré $(p,p)$ quelconque revient essentiellement à pouvoir définir le produit $(\mu_\star \omega) \wedge \Theta$, où $\omega$ est une forme kählerienne sur $Y$. Le $(1,1)$-courant positif fermé $T := \mu_\star \omega$ est lisse en dehors de $A$, mais est singulier le long de $A$. Comme $A$ est codimension au moins deux, le théorème 1.1.1 nous dit que $T \wedge \Theta$ est bien défini lorsque $p < 2$, mais en général ce produit ne peut être défini pour $p \geq 2$.
Par contre, quand $f : Y \to X$ est un morphisme propre, le tiré en arrière $f^\star \Theta$ est toujours bien défini en dehors de l'ensemble analytique $f^{-1}(C)$, où $C \subset X$ est l'ensemble des valeurs critiques de $f$. Ceci est dû au fait que le poussé en avant d'une forme lisse par une submersion propre est à nouveau un forme lisse. On peut donc se demander si le courant positif fermé $f^\star \Theta$, défini sur $f^{-1}(X - C)$, est de masse localement finie près de $f^{-1}(C)$. Si tel est le cas, le théorème d'extension de Skoda-El Mir nous dit que l'extension triviale $\widetilde{\Theta}$ de $f^\star \Theta$ à $Y$ tout entier est un courant positif fermé, qu'on est en droit d'appeler la transformée stricte de $\Theta$ sous $f$. Malheureusement, ceci échoue à nouveau quand $X$ n'est pas compacte, comme le montre un exemple dû à M.Meo, qui se construit en posant $\Theta = (dd^c \varphi)^2$ et $\mu$ l'éclatement de $\mathbf{C}^n$ le long de $\{z'' = 0\}$ comme dans l'exemple de Kiselman ci-dessus. Toutefois, on a un résultat positif dans le cas suivant :

**Proposition 3.1.13** *Soit $\mu : Y \to X$ une modification entre variétés kähleriennes compactes, et soit $\Theta$ un courant positif fermé de bidegré $(p,p)$ quelconque sur $X$. Alors sa transformée stricte $\widetilde{\Theta}$ sous $\mu$ est bien définie.*

**Démonstration** : d'après ce qu'on vient de voir, il s'agit de vérifier que, pour toute forme kählerienne $\omega$ sur $Y$, le courant $\Theta \wedge (\mu_\star \omega)^p$ défini sur $X - A$ est de masse localement finie près de $A$. C'est exactement ce que dit le théorème 3.1.12.

### 3.1.4 Une inégalité du type Morse.

Rappelons d'abord l'énoncé des inégalités de Morse holomorphes, dues à J-.P.Demailly :

**Théorème 3.1.14 (Dem85)** *Soit $X$ une variété complexe compacte, $L$ un fibré en droites sur $X$, et $\theta$ une $(1,1)$-forme lisse dans $c_1(L)$. Alors on a,* *pour tout $q \geq 0$, les inégalités de Morse faibles*

$$h^q(X, kL) \leq \frac{k^n}{n!} \int_{X(\theta,q)} (-1)^q \theta^n + o(k^n)$$

*lorque $k \to +\infty$, et les inégalités fortes*

$$h^q(X, kL) - h^{q-1}(X, kL) + ... + (-1)^q h^0(X, kL) \leq \frac{k^n}{n!} \int_{X(\theta,\leq q)} (-1)^q \theta^n + o(k^n).$$

On a noté $X(\theta, q)$ l'ensemble des points d'indice $q$ de la forme $\theta$, i.e. les points où $\theta$ a exactement $q$ valeurs propres strictement négatives. $X(\theta, \leq q)$ désigne quant à lui l'ensemble des points d'indice au plus $q$. Pour $q = n$, l'inégalité de Morse forte est une égalité (c'est la version asymptotique du théorème de Riemann-Roch), et les inégalités faibles sont une conséquence des inégalités fortes.
Comme application de ce théorème, redonnons le résultat suivant (cf. [DPS94]) :

**Proposition 3.1.15** *Si $L$ est un fibré en droites nef sur une variété kählerienne compacte $X$ de dimension $n$, alors $h^q(kL) = o(k^n)$ pour tout $q > 0$, lorsque $k \to +\infty$.*

**Démonstration** : le but est de voir que $v_q(L) := \limsup_{k\to+\infty} \frac{n!}{k^n} h^q(kL)$ est nul pour tout $q > 0$. Soit $\omega$ une forme kählerienne fixée sur $X$. Puisque $L$ est nef, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une forme lisse $\theta_\varepsilon$ dans $c_1(L)$ telle que $\theta_\varepsilon \geq -\varepsilon\omega$, et les inégalités de Morse faibles montrent que $v_q(L) \leq \int_{X(\theta_\varepsilon,q)} (-1)^q \theta_\varepsilon^n$. Comme la partie négative de $\theta_\varepsilon$ tend vers 0, il semble raisonnable d'espérer que ces intégrales tendent vers 0 avec $\varepsilon$ pour $q > 0$ ; c'est ce que nous allons démontrer. Il suffit en fait de remarquer que

$$0 \leq \frac{(-1)^q}{n!} \theta_\varepsilon^n \leq \frac{1}{q!} (\varepsilon\omega)^q \wedge \frac{1}{(n-q)!} (\theta_\varepsilon + \varepsilon\omega)^{n-q}$$

sur $X(\theta_\varepsilon, q)$. En effet, $\int_X \omega^q \wedge (\theta_\varepsilon + \varepsilon\omega)^{n-q}$ se calcule en cohomologie, donc ne dépend pas de $\varepsilon$, et le résultat suit.
**Remarque** : plus généralement, on peut montrer en adaptant [DPS94] que $h^{n-q}(kL) = o(k^n)$ si $c_1(L)$ est nef en codimension $q < n$, au sens où son lieu non nef ne contient pas de sous-variétés de codimension $\leq q$.

**Corollaire 3.1.16** *Si $L$ est un fibré nef sur une variété kählerienne compacte $X$, son volume vérifie $v(L) = L^n$.*

**Démonstration** : il suffit d'injecter le résultat précédent dans la formule de Riemann-Roch asymptotique $\chi(X, \mathcal{O}(kL)) = L^n \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1})$.

Nous allons maintenant démontrer une version "singulière" de ce résultat pour un fibré en droites pseudoeffectif, en utilisant la version singulière des inégalités de Morse due à L.Bonavero et le théorème de Fujita 3.1.2, qui ramène le volume d'un fibré gros à celui d'un fibré ample. Nous citons donc le résultat suivant, démontré dans [Bon93] :

**Théorème 3.1.17** *Soit $X$ une variété complexe compacte, $L$ un fibré en droites sur $X$, et $T$ un $(1,1)$-courant fermé presque positif dans $c_1(L)$. Si l'on suppose de plus que $T$ est à singularités algébriques, alors on a, pour tout $q \geq 0$, les inégalités de Morse*

$$h^q(X,\mathcal{O}(kL)\otimes\mathcal{I}(kT))+...+(-1)^q h^0(X,\mathcal{O}(kL)\otimes\mathcal{I}(kT)) \leq \frac{k^n}{n!}\int_{X(T,\leq q)}(-1)^q T^n + o(k^n).$$

Dans cet énoncé, les intégrales sont prises sur les points lisses de $T$, de sorte que $T^n$ est bien défini là où l'on intègre. Remarquons qu'il revient au même de définir $X(T,q)$ comme les points d'indice $q$ de la partie absolument continue $T_{ac}$ de $T$ et d'intégrer $T_{ac}^n$ sur les points d'indice (au plus) $q$.

**Corollaire 3.1.18** *Si $L$ est un fibré en droites sur une variété complexe compacte $X$, son volume satisfait l'inégalité*

$$v(L) \geq \int_{X(T,\leq 1)} T_{ac}^n$$

*pour tout courant presque positif $T \in c_1(L)$ à singularités algébriques.*

**Démonstration** : on a

$$h^0(X,kL) \geq h^0(X,\mathcal{O}(kL)\otimes\mathcal{I}(kT))$$

$$\geq h^0(X,\mathcal{O}(kL)\otimes\mathcal{I}(kT)) - h^1(X,\mathcal{O}(kL)\otimes\mathcal{I}(kT)),$$

donc $h^0(X,kL) \geq \frac{k^n}{n!}\int_{X(T,\leq 1)} T_{ac}^n + o(k^n)$ d'après le théorème précedent. Le résultat découle maintenant de la définition du volume.

**Théorème 3.1.19** *Soit $L$ un fibré en droites pseudoeffectif sur une variété compacte kählerienne. Alors on a*

$$v(L) = \sup_T \int_X T_{ac}^n$$

*pour $T$ décrivant les courants positifs fermés dans $c_1(L)$.*

**Démonstration** : on montre d'abord l'inégalité de Morse

$$v(L) \geq \int_X T_{ac}^n$$

pour tout courant positif fermé $T \in c_1(L)$.
Soit $\omega$ une forme kählerienne fixée, et soit $T_k \in c_1(L)$ un suite de courants à singularités algébriques approchant $T$ comme dans le théorème 3.1.8, de sorte que $T_k \geq -\varepsilon_k\omega$ et $T_{k,ac}(x) \to T_{ac}(x)$ pour presque tout $x \in X$. Soit $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ (resp. $\lambda_1^{(k)} \leq ... \leq \lambda_n^{(k)}$) les valeurs propres de $T_{ac}$ (resp. $T_{k,ac}$) par rapport à $\omega$. On a donc $\lambda_1^{(k)} \geq -\varepsilon_k$, et $\lambda_j^{(k)} \to \lambda^{(j)}$ presque partout. Soit $A := \{\lambda_1 > 0\}$. Pour chaque $\delta > 0$, le lemme d'Egoroff nous donne donc $B_\delta \subset A$ tel que $\lambda_1^{(k)} \to \lambda_1$ uniformément sur $B_\delta$ et tel que $A - B_\delta$ soit de mesure inférieure à $\delta$. Par convergence uniforme, on a $B_\delta \subset X(T_k, 0)$ pour $k$ assez grand, et par conséquent $\liminf \int_{X(T_k,0)} T_{k,ac}^n \geq \int_{B_\delta} \liminf T_{k,ac}^n = \int_{B_\delta} T_{ac}^n$, en utilisant le lemme de Fatou. Lorsque $\delta$ tend vers 0, $\int_{B_\delta} T_{ac}^n$ tend vers $\int_A T_{ac}^n = \int_{X(T,0)} T_{ac}^n$, et l'on a donc

$$\liminf \int_{X(T_k,0)} T_{k,ac}^n \geq \int_{X(T,0)} T_{ac}^n.$$

Comme $T_k$ est à singularités algébriques, on a

$$v(L) \geq \int_{X(T_k,\leq 1)} T_{k,ac}^n = \int_{X(T_k,0)} T_{k,ac}^n + \int_{X(T_k,1)} T_{k,ac}^n,$$

donc la preuve de l'inégalité de Morse sera achevée si l'on peut montrer que $\int_{X(T_k,1)} T_{k,ac}^n$ tend vers 0. Pour ce faire, on remarque que les inégalités suivantes ont lieu sur $X(T_k, 1)$ :

$$0 \leq -T_{k,ac}^n \leq n\varepsilon_k\omega \wedge (T_{k,ac} + \varepsilon_k\omega)^{n-1},$$

d'où l'on tire

$$0 \leq -\int_{X(T_k,1)} T_{k,ac}^n \leq n\varepsilon_k \int_X \omega \wedge (T_{k,ac} + \varepsilon_k\omega)^{n-1}.$$

Comme cette dernière intégrale est uniformément bornée d'après la proposition 3.1.10 (car $X$ est kählerienne !), l'inégalité est démontrée.
Pour achever la preuve du théorème 3.1.19, on va exhiber une suite $T_\varepsilon$ de courants positifs fermés tels que $\int_X T_{\varepsilon,ac}^n$ converge vers $v(L)$. Ceci va résulter du théorème de Fujita. Notons que l'on peut supposer que $X$ est projective ; en effet, $X$ l'est si $v(L) > 0$, puisque $X$ est dans ce cas kählerienne et de Moishezon. Autrement, on a $v(L) = 0$, et le théorème est déjà démontré. D'après le théorème de Fujita, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ et une décomposition $\mu^\star L = A_\varepsilon + E_\varepsilon$, où $A_\varepsilon$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample, $E_\varepsilon$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif, et $|v(L) - v(A_\varepsilon)| < \varepsilon$. On choisit alors une forme kählerienne $\theta_\varepsilon$ dans $c_1(A)$, et l'on pose

$$T_\varepsilon := \mu_\star(\theta_\varepsilon + [E_\varepsilon]).$$

Ce courant est positif et appartient à $c_1(L)$. De plus, on a $\int_X T_{ac}^n = \int_{\widetilde{X}}(\theta_\varepsilon + [E_\varepsilon])_{ac}^n = \int_{\widetilde{X}} \theta_\varepsilon^n$, et cette dernière intégrale vaut par définition $A_\varepsilon^n$, qui est aussi le volume $v(A_\varepsilon)$ de $A_\varepsilon$ puisque $A_\varepsilon$ est ample. Au total, on a donc construit pour tout $\varepsilon > 0$ un courant positif fermé $T_\varepsilon$ dans $c_1(L)$ tel que $|v(L) - \int_X T_{\varepsilon,ac}^n| < \varepsilon$, qed.

### 3.1.5 Le théorème de Calabi-Yau.

Le résultat fondamental suivant est démontré dans [Yau78] :

**Théorème 3.1.20 (Aubin-Calabi-Yau)** *Soit $(X, \omega)$ une variété kählerienne compacte, et supposons que $\int_X \omega^n = 1$. Alors, pour toute classe de cohomologie kählerienne $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, il existe une unique forme kählerienne $\tau \in \alpha$ telle que*

$$\tau(x)^n = (\int_X \alpha^n)\omega(x)^n$$

*pour tout $x \in X$.*

Considérons le cas où $\alpha = c_1(A)$ est un fibré en droites amples. Le théorème affirme qu'il existe une métrique hermitienne lisse $h$ sur $A$ telle que le produit des valeurs propres de la forme de courbure $\Theta_h(A)$ soit constamment égal au volume $v(A) = A^n$ de $A$. Nous allons démontrer une version singulière de ce résultat :

**Théorème 3.1.21** *Soit $L$ un fibré en droites pseudoeffectif sur une variété kählerienne compacte $X$. Si $\omega$ est une forme kählerienne donnée avec $\int_X \omega^n = 1$, alors il existe une métrique hermitienne singulière $h$ sur $L$, à courant de courbure $T := \Theta_h(L)$ positif, et telle que*

$$T_{ac}(x)^n = v(L)\omega(x)^n$$

*pour presque tout $x \in X$. En particulier, $T$ réalise le supremum dans le théorème 3.1.19.*

**Démonstration** : on applique à nouveau le théorème de Fujita de façon à obtenir, pour chaque $\varepsilon > 0$, une modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que $\mu^\star L = A_\varepsilon + E_\varepsilon$ et $|v(L) - v(A_\varepsilon)| < \varepsilon$. Au lieu de prendre un représentant quelconque $\theta_\varepsilon$ de $c_1(A_\varepsilon)$ comme dans la preuve du théorème 3.1.19, on le choisit comme suit : soit $\widetilde{\omega}$ une forme kählerienne quelconque sur $\widetilde{X}$, et posons $\widetilde{\omega}_\delta := \mu^\star\omega + \delta\widetilde{\omega}$. Pour tout $\delta > 0$, $\widetilde{\omega}_\delta$ est une forme kählerienne sur $\widetilde{X}$, donc d'après le théorème de Calabi-Yau, on peut trouver une forme kählerienne $\theta_{\varepsilon,\delta}$ représentant $c_1(A_\varepsilon)$ et telle que

$$\theta_{\varepsilon,\delta}(x)^n = \frac{A_\varepsilon^n}{\int \widetilde{\omega}_\delta^n}\widetilde{\omega}(x)^n$$

pour tout $x \in \widetilde{X}$. Comme l'ensemble des courants positifs fermés dans $c_(A_\varepsilon)$ est faiblement compact, on peut extraire une valeur d'adhérence $S_\varepsilon = \lim_{\delta\to 0}\theta_{\varepsilon,\delta}$, qui vérifie

$$S^n_{\varepsilon,ac} \geq v(A_\varepsilon)\mu^\star\omega^n$$

par semi-continuité de la partie absolument continue (proposition 3.1.5). On pose maintenant $T_\varepsilon := \mu_\star(S_\varepsilon + [E_\varepsilon])$. C'est un courant positif fermé dans $c_1(L)$, tel que $T_{\varepsilon,ac} = \mu_\star(S_{\varepsilon,ac})$ d'après la proposition 3.1.6, et donc

$$T_{\varepsilon,ac}(x)^n \geq v(A_\varepsilon)\omega(x)^n$$

presque partout. A nouveau, on extrait une valeur d'adhérence $T = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon$, qui est un courant positif fermé dans $c_1(L)$ avec

$$T_{ac}(x)^n \geq v(L)\omega(x)^n$$

presque partout, par semi-continuité ($v(A_\varepsilon)$ converge vers $v(L)$ par hypothèse). Comme $\int_X T^n_{ac} \leq \int_X v(L)\omega^n = v(L)$ par le théorème 3.1.19, on a donc l'égalité $T^n_{ac} = v(L)\omega^n$ presque partout, qed.
**Remarque** : il est peu probable qu'un tel courant $T$ soit unique en général, bien qu'on ait unicité dans le cas lisse.

### 3.1.6 Volume d'une classe pseudoeffective.

Dans cette partie, on désigne par $X$ une variété kählerienne compacte de dimension $n$. Au vu du théorème 3.1.19, on propose la

**Définition 3.1.22** *On définit le volume d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ par la formule*

$$v(\alpha) := \sup_T \int_X T^n_{ac}$$

*pour $T$ décrivant l'ensemble des courants positifs fermés dans $\alpha$. Si $\alpha$ n'est pas pseudoeffective, on pose $v(\alpha) = 0$.*

Notons que $v(\alpha) < +\infty$ grâce à la proposition 3.1.10.

Nous montrons maintenant une version singulière du théorème de Calabi-Yau :

**Théorème 3.1.23** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective, et $\omega$ une forme kählerienne telle que $\int_X \omega^n = 1$. Alors il existe un courant positif fermé $T \in \alpha$ tel que*

$$T_{ac}(x)^n = v(\alpha)\omega(x)^n$$

*presque partout.*

La preuve de ce théorème est en fait identique à celle du théorème 3.1.21, une fois que l'on dispose de la version appropriée du théorème de Fujita :

**Théorème 3.1.24** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ une classe grosse. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ et une décomposition $\mu^\star\alpha = \beta + \{E\}$ où $\beta$ est une classe kählerienne et $E$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif, telle que $|v(\alpha) - v(\beta)| < \varepsilon$.*

Une fois que ce résultat est démontré, on obtient le théorème 3.1.23 de la façon suivante : si $\delta > 0$, la classe $\alpha + \delta\{\omega\}$ est grosse, donc le raisonnement utilisé pour démontrer le théorème 3.1.21 nous donne un courant positif $T_\delta$ dans $\alpha + \delta\{\omega\}$ tel que $T_\delta(x)^n \geq v(\alpha + \delta\{\omega\})\omega(x)^n$ p.p. $x \in X$. Les intégrales des deux membres vérifient l'inégalité réciproque par définition du volume, et les deux membre sont donc égaux p.p. On choisit alors une valeur d'adhérence $T = \lim_{\delta\to 0} T_\delta$, qui est un courant positif fermé dans $\alpha$ vérifiant $T(x)^n \geq v(\alpha)\omega(x)^n$ p.p., et donc $T(x)^n = v(\alpha)\omega(x)^n$ p.p. (on a utilisé que $v(\alpha) = \lim_{\delta\to 0} v(\alpha + \delta\{\omega\})$, ce qui résulte très facilement du lemme de Fatou).
Montrons maintenant le théorème 3.1.24 :

**Lemme 3.1.25** *Si $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ est une classe grosse, il existe une suite de courants kähleriens à singularités analytiques $T_k \in \alpha$ telle que $\int_X T_{k,ac}^n \to v(\alpha)$.*

**Démonstration** : soit $\varepsilon > 0$, et choisissons un courant kählerien $T_0$ dans $\alpha$. Par définition du volume, il existe un courant positif $S$ dans $\alpha$ ave $\int_X S_{ac}^n > v(\alpha) - \varepsilon$. Par le lemme de Fatou, on a aussi

$$\int_X S_{ac}^n \leq \liminf_{\delta\to 0} \int_X ((1-\delta)S + \delta T_0)_{ac}^n,$$

donc il existe $\delta > 0$ tel que $T_1 := (1-\delta)S + \delta T_0$ soit un courant kählerien dans $\alpha$ avec $\int_X T_{1,ac} > v(\alpha) - \varepsilon$. Grâce au théorème 3.1.8, on peut maintenant choisir une suite $T_k$ de courants kähleriens à singularités analytiques dans $\alpha$ telle que $T_{k,ac}(x) \to T_{ac}(x)$ p.p., et le lemme de Fatou montre à nouveau que $\int_X T_{k,ac}^n > v(\alpha) - \varepsilon$ pour $k$ assez grand, qed.
Soit maintenant $\alpha$ une classe grosse, et soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme 3.1.25, on peut choisir une courant kählerien à singularités analytiques $T \in \alpha$ tel que $|v(\alpha) - \int_X T_{ac}^n| < \varepsilon$. Par résolution des singularités, on trouve une suite d'éclatements de centre lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ telle que la partie résiduelle $R$ de $\mu^\star T$ soit lisse, et l'on a alors $\int_X T_{ac}^n = \int_{\widetilde{X}} R^n$. Puisque $\{R\}$ est nef, $\beta_\delta := \{R\} - \frac{\delta}{1+\delta}\{\sum a_j E_j\} = \frac{1}{1+\delta}(\{R\} + \delta(\{R\} - \{\sum a_j E_j\}))$ est une classe kählerienne pour tout $\delta > 0$. Enfin, $v(\beta_\delta) = \beta_\delta^n$ tend vers $\int_{\widetilde{X}} \theta^n = \int_X T_{ac}^n$ quand $\delta \to 0$, et on a donc $|v(\alpha) - v(\beta_\delta)| < \varepsilon$ pour $\delta > 0$ assez petit. On obtient alors la décomposition $\mu^\star\alpha = \beta + \{E\}$ en posant $\beta := \beta_\delta$ and

$D := E + \frac{\delta}{1+\delta}\{\sum a_j E_j\}$. Le théorème 3.1.24 est démontré.

En guise d'application du théorème 3.1.23, on peut commencer à étudier la continuité du volume :

**Proposition 3.1.26** *La restriction de la fonction $\alpha \mapsto v(\alpha)^{1/n}$ au cône pseudoeffectif $\mathcal{E}$ est homogène et concave, et donc continue sur le cône gros $\mathcal{E}^0$. Cette fonction est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{E}$ tout entier.*

**Démonstration** : soit $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux classes pseudoeffectives, et choisissons un courant positif fermé $T_j \in \alpha_j$ tel que$T_{j,ac}(x)^n = v(\alpha_j)\omega(x)^n$ p.p. Comme on l'a déjà dit, la fonction $A \mapsto \det(A)^{1/n}$ est concave et homogène sur le cône convexe des matrices hermitiennes positives, et on a donc $\det(T_{1,ac}(x) + T_{2,ac}(x)) \geq (\det(T_{1,ac}(x))^{1/n} + \det(T_{2,ac}(x))^{1/n})^n = (v(\alpha_1)^{1/n} + v(\alpha_2)^{1/n})^n$ p.p., d'où $v(\alpha_1 + \alpha_2) \geq \int_X \det(T_{1,ac} + T_{2,ac})\omega^n \geq (v(\alpha_1)^{1/n} + v(\alpha_2)^{1/n})^n$. L'homogénéité de $\alpha \mapsto v(\alpha)^{1/n}$ est triviale, et la concavité en découle. Il reste à démontrer la semi-continuité. Soit $\alpha_k$ une suite de classes pseudoeffectives convergeant vers $\alpha$, et choisissons pour tout $k$ un courant positif fermé $T_k \in \alpha_k$ tel que $T_{k,ac}(x)^n = v(\alpha_k)\omega(x)^n$ p.p. Par compacité faible, on peut supposer que $T_k$ converge faiblement vers $T \in \alpha$. Par semi-continuité, $T$ vérifie donc $T_{ac}(x)^n \geq \limsup T_{k,ac}(x)^n = \limsup v(\alpha_k)\omega(x)^n$ p.p. En intégrant, on en déduit $v(\alpha) \geq \limsup v(\alpha_k)$, qed.

**Remarques** :(i) nous verrons que le volume est en fait continu sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ tout entier (cf. corollaire 3.1.35).

(ii) Je remercie R.K.Lazarsfeld de m'avoir signalé la propriété de concavité précédente.

La proposition suivante généralise le cas des fibrés en droites :

**Proposition 3.1.27** *Si $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est une classe nef, on a $v(\alpha) = \alpha^n$.*

**Démonstration** : on commence par le lemme suivant, dû à C.Mourougane [Mou98] :

**Lemme 3.1.28** *Si $\alpha$ est une classe nef, on a $\int_X T_{ac}^n \leq \alpha^n$ pour tout courant positif fermé $T \in \alpha$.*

**Démonstration** : elle est similaire à celle du théorème 3.1.10. On fixe une forme kählerienne $\omega$, et l'on écrit $T = \theta + dd^c\varphi$ avec $\theta$ lisse. On considère une approximation de $T$ par des formes lisses $T_k^{(1)} = \theta + dd^c\varphi_k^{(1)}$ données par le théorème 3.1.7, i.e. telles que $T_k^{(1)} \to T$ et $T_k^{(1)}(x) \to T_{ac}(x)$ p.p., avec une partie négative pour $T_k^{(1)}$ contrôlée par les nombres de Lelong de $T$. Comme $\alpha$ est nef, il existe aussi par définition une suite $\varphi_k^{(2)}$ de fonctions lisses sur $X$ telle que $T_k^{(2)} := \theta + dd^c\varphi_k^{(2)}$ vérifie $T_k^{(2)} \geq -\varepsilon_k\omega$ ($T_k^{(2)}$ n'a bien sûr aucun lien avec $T$ *a priori*). On pose alors

$$\varphi_k^{(3)} := \max_\eta(\varphi_k^{(2)} - C_k, \varphi_{j_k}^{(1)}),$$

avec $j_k \gg k$. Cette fonction est lisse, et les arguments donnés dans la preuve du théorème 3.1.8 montrent facilement que $T_k^{(3)} := \theta + dd^c\varphi_k^{(3)}$ vérifie $T_k^{(3)}(x) \to T_{ac}(x)$ p.p. et $T_k^{(3)} \geq -\delta_k\omega$ pour une suite $\delta_k > 0$ convergeant vers zéro quand $j_k \gg k$ assez rapidement (en revanche, on ne peut espérer que $T_k^{(3)}$ converge faiblement vers $T$ en général). Puisque $T_k^{(3)} + \delta_k\omega$ converge vers $T_{ac}$ p.p., le lemme de Fatou donne

$$\int_X T_{ac}^n \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X (T_k^{(3)} + \delta_k\omega)^n,$$

et cette dernière intégrale est juste $(\alpha + \delta_k\{\omega\})^n$, donc converge vers $\alpha^n$, qed. On a ainsi $v(\alpha) \leq \alpha^n$ pour toute classe nef $\alpha$. Si $\alpha$ est de plus kählerienne, $\int_X T_{ac}^n = \alpha^n$ pour toute forme positive lisse $T \in \alpha$, et on a donc égalité $v(\alpha) = \alpha^n$ dans ce cas. Pour obtenir le cas d'une classe nef quelconque, on note que si $\alpha$ est nef, $\alpha + \varepsilon\{\omega\}$ est une classe kählerienne si $\omega$ est une forme kählerienne fixée, et donc $v(\alpha+\varepsilon\{\omega\}) = (\alpha+\varepsilon\{\omega\})^n$ converge vers $\alpha^n$ pour $\varepsilon \to 0$. Comme le volume est semi-continu supérieurement, on a donc $v(\alpha) \geq \alpha^n$ à la limite, qed.

Enfin, nous étudions le comportement du volume par déformation :

**Proposition 3.1.29** *Le volume est semi-continu supérieurement dans les déformations, au sens suivant : si $\mathcal{X} \to S$ est une déformation de variétés kähleriennes compactes, et si $\alpha_k \in H^{1,1}(X_{t_k}, \mathbf{R})$ est une suite de classes pseudoeffectives convergeant vers $\alpha \in H^{1,1}(X_0, \mathbf{R})$ (avec $t_k \to 0$), alors*

$$v(\alpha) \geq \limsup_{k\to+\infty} v(\alpha_k).$$

**Démonstration** : quitte à rétrécir la base $S$, on peut supposer que la déformation est topologiquement triviale, et qu'il existe une familllle lisse $\omega_t$ de métriques kähleriennes sur $X_t$, qu'on normalise pour que $\int_{X_t} \omega_t^n = 1$. D'après le théorème 3.1.23, il existe un courant positif $T_k$ sur $X_{t_k}$, représentant $\alpha_k$ et tel que $T_{k,ac}^n = v(\alpha_k)\omega_{t_k}^n$ presque partout. Puisque la suite $\alpha_k$ converge, elle est bornée, et $T_k$ est donc borné en masse. On peut donc en extraire une valeur d'adhérence $T = \lim_{k\to\infty} T_k$. Il est clair que $T$ représente $\alpha$. Par semi-continuité de la partie absolument continue, on a $T_{ac}^n \geq \limsup v(\alpha_k)\omega_0^n$ presque partout, et donc $v(\alpha) \geq \limsup v(\alpha_k)$, qed.

### 3.1.7 Volume et classes grosses.

Nous avons vu qu'un fibré en droites $L$ est gros ssi son volume $v(L)$ est non nul. Nous nous proposons d'étendre ce résultat à toutes les classes $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Commençons par un résultat dû à Demailly et Paun :

**Théorème 3.1.30 (DP01)** *Si $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est une classe nef telle que $\alpha^n > 0$, alors $\alpha$ contient un courant kählerien.*

La preuve de ce résultat n'est pas triviale, et est en fait l'un des principales étapes dans la preuve par Demailly et Paun de leur critère de Nakai-Moishezon pour les classes kählerienne. Puisque $v(\alpha) = \alpha^n$ pour une classe nef, le résultat suivant généralise le théorème 3.1.30 :

**Théorème 3.1.31** *Si $X$ est une variété kähleriene compacte, une classe $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est grosse ssi $v(\alpha) > 0$.*

**Démonstration** : si $\alpha$ est grosse, elle contient un courant kählerien $T \geq \varepsilon\omega$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On a donc $v(\alpha) \geq \int_X T_{ac}^n > 0$. Pour démontrer la réciproque, nous allons abondamment faire appel à la preuve du théorème 3.1.30 donnée dans [DP01].
Par le théorème d'approximation par des singularités analytiques et le lemme de Fatou, on peut trouver une suite $T_k \geq -\varepsilon\omega$ de courants à singularités analytiques dans $\alpha$ tels que $\int_X (T_{k,ac} + \varepsilon_k\omega)^n$ converge vers $v(\alpha)$, donc est uniformément minorée par une constante $c > 0$. Pour tout $k$, on choisit une modification $\mu_k : X_k \to X$ telle que la décomposition de Siu de $\mu^\star T_k$ s'écrive $R_k + [E_k]$ avec $R_k$ lisse. Comme $R_k + \varepsilon_k\mu_k^\star\omega$ est une forme lisse positive, sa classe est nef, de volume $\int_{X_k}(R_k + \varepsilon_k\mu_k^\star\omega)^n = \int_X (T_{k,ac} + \varepsilon_k\omega)^n \geq c > 0$, donc d'après le théorème 3.1.30, il existe un courant kählerien $S_k$ dans $\{R_k + \varepsilon_k\mu_k^\star\omega\}$. Le poussé en avant $\mu_\star(S_k + [E_k])$ est alors un courant kählerien dans $\alpha + \varepsilon_k\{\omega\}$, mais le problème est qu'on ne dispose pas d'un minorant uniforme $\delta\omega > 0$ de ces courants. Nous allons en fait recopier la preuve du théorème 3.1.30 donnée dans [DP01] de façon à montrer que l'existence d'une telle borne uniforme $\delta\omega$ découle de la borne uniforme $c > 0$ sur le volume de la classe $\{R_k + \varepsilon\mu_k^\star\omega\}$.
Le résultat suivant est le lemme 2.1 de [DP01] :

**Lemme 3.1.32** *Soit $(X, \omega)$ une variété kählerienne compacte, et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble analytique de codimension $p$. Alors il existe une function $\varphi$ à singularités analytiques le long de $Y$, un borne $\delta > 0$ et une suite $\varphi_\varepsilon$ de fonctions lisses décroissant vers $\varphi$ ponctuellement telle que $\omega_\varepsilon := \omega + dd^c\varphi_\varepsilon$ vérifie $\omega_\varepsilon \geq 1/2\omega$ et*

$$\int_{V_\varepsilon} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq \delta$$

*pour tout $\varepsilon > 0$, avec $V_\varepsilon := \{\varphi < \log\varepsilon\}$.*

idée de la preuve : soit $f = (f_1, ..., f_r)$ des générateurs locaux de l'idéal $\mathcal{I}_Y$ de $Y$ près d'un point $x_0$. La fonction à singularités de type $\mathcal{I}_Y$

$$\psi := \frac{1}{2}\log(\sum |f_j|^2)$$

est psh, et le $(p,p)$-courant positif $(dd^c\psi)^p$ est bien défini d'après le théorème 1.1.1, puisque $Y$ est de codimension $p$. D'après la formule de King [Kin70], le $p$-cycle qui apparaît dans sa décomposition de Siu est le $p$-cycle associé au germe $(Y, x_0)$, donc en particulier $(dd^c\psi)^p$ charge $Y$. On pose alors $\psi_\varepsilon := \frac{1}{2}\log(\sum |f_j|^2 + \varepsilon^2)$ et $\omega_\varepsilon := \omega + dd^c\psi_\varepsilon$. La forme volume $\omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p}$ converge faiblement vers le courant $(\omega + dd^c\psi)^p \wedge \omega^{n-p}$, qui a une masse non nulle sur $Y$ d'après ce qui précède, et ceci donne la version locale du résultat. Pour globaliser, on procède comme dans la preuve de la proposition 1.1.4 : on choisit un recouvrement fini de $X$ par des ouverts $U_i$ tel que $f^{(i)} = (f_1^{(i)}, ..., f_{N_i}^{(i)})$ engendre $\mathcal{I}_Y$ sur un voisinage de $\overline{U_i}$, et l'on pose

$$\psi := \frac{1}{2}\log(\sum_j \theta_j |f^{(j)}|^2)$$

et

$$\psi_\varepsilon := \frac{1}{2}\log(\sum_j \theta_j(|f^{(j)}|^2 + \varepsilon^2)),$$

où $\theta_i$ est une partition de l'unité associée au recouvrement $U_i$. $\psi_\varepsilon$ est alors une suite de fonctions lisses qui décroît vers $\psi$, et cette dernière est à singularités de type $\mathcal{I}_Y$. De plus, on montre dans [DP01] la partie négative de $dd^c\psi_\varepsilon$ est uniformément bornée, de sorte qu'il existe $\eta > 0$ assez petit pour que $\omega + \eta dd^c\psi_\varepsilon \geq 1/2\omega$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'après la version locale du résultat, il reste à poser $\varphi := \eta\psi$ et $\varphi_\varepsilon := \eta\psi_\varepsilon$.
Le lemme suivant est aussi tiré de [DP01] :

**Lemme 3.1.33** *Soit $(X, \omega)$ une variété kählerienne compacte de dimension $n$, et soit $Y$ une sou-variété analytique de codimension $p$. Supposons donnés : une base de voisinages $V_\varepsilon$ de $Y$, une famille de formes kähleriennes $\omega_\varepsilon \geq 1/2\omega$ dans la classe $\{\omega\}$, et une borne $\delta > 0$ telle que*

$$\int_{V_\varepsilon} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq \delta$$

*pour tout $\varepsilon > 0$.*
*Alors, pour chaque classe nef $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ avec $v(\alpha) = \alpha^n > 0$, il existe un $(p,p)$-courant positif fermé $T$ dans la classe $\alpha^p$ tel que*

$$\int_Y T \wedge \omega^{n-p} \geq \lambda,$$

*pour* $\lambda := C_n \delta^2 v(\alpha)/(\int \alpha^{n-p} \wedge \omega^p) v(\omega)$, *où* $C_n > 0$ *est une constante ne dépendant que de* $n$.

**Démonstration** : pour tout $\varepsilon > 0$, le théorème de Calabi-Yau nous donne une forme kählerienne $\tau_\varepsilon$ dans la classe $\alpha + \varepsilon\{\omega\}$ telle que

$$\tau_\varepsilon(x)^n = \frac{v(\alpha+\varepsilon\omega)}{v(\omega)} \omega_\varepsilon(x)^n$$

en tout point $x \in X$. Si

$$\lambda_1^\varepsilon \leq \ldots \leq \lambda_n^\varepsilon$$

désignent les valeurs propres de $\tau_\varepsilon$ par rapport à $\omega_\varepsilon$, on a donc :
(1)$\lambda_1^\varepsilon \ldots \lambda_n^\varepsilon = v(\alpha+\varepsilon\omega)/v(\omega)$,
(2)$\tau_\varepsilon^p \geq (\lambda_1^\varepsilon \ldots \lambda_p^\varepsilon)\omega_\varepsilon^p$,
(3)$\tau_\varepsilon^{n-p} \wedge \omega_\varepsilon^p \geq C_n^{-1}(\lambda_{p+1}^\varepsilon \ldots \lambda_n^\varepsilon)\omega_\varepsilon^n$,
où $C_n = \binom{n}{p}$. La relation (3) implique

$$\int_X (\lambda_{p+1}^\varepsilon \ldots \lambda_n^\varepsilon)\omega_\varepsilon^n \leq C_n \int (\alpha+\varepsilon\omega)^{n-p} \wedge \omega^p =: M_p,$$

et en particulier l'ensemble $E_\eta := \{\lambda_{p+1}^\varepsilon \ldots \lambda_n^\varepsilon \geq M_p/\eta\}$ vérifie $\int_{E_\eta} \omega_\varepsilon^n \leq \eta$ pour tout $\eta > 0$. De (1) et (2), on tire :

$$\int_{V_\varepsilon} \tau_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq \frac{v(\alpha+\varepsilon\omega)}{v(\omega)} \int_{V_\varepsilon} (\lambda_{p+1}^\varepsilon \ldots \lambda_n^\varepsilon)^{-1} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p}$$

$$\geq \frac{v(\alpha+\varepsilon\omega)}{v(\omega)} \int_{V_\varepsilon - E_\eta} \frac{\eta}{M_p} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p}.$$

Remarquons que

$$\int_{V_\varepsilon - E_\eta} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq \int_{V_\varepsilon} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} - \int_{E_\eta} \omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p}.$$

La première intégrale sur la droite est plus grande que $\delta$ par hypothèse, et puisque $\omega_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \leq 2^{n-p}\omega_\varepsilon^n$ (on a supposé $\omega_\varepsilon \geq 2^{-1}\omega$), la seconde intégrale sur la droite vaut au plus $2^{n-p}\eta$. En combinant tout ceci, on obtient :

$$\int_{V_\varepsilon} \tau_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq (v(\alpha+\varepsilon\omega)\eta)(v(\omega)M_p)^{-1}(\delta - 2^{n-p}\eta).$$

On prend maintenant $\eta := \delta/2^{n-p+1}$, de sorte que la dernière inégalité devient
$\int_{V_\varepsilon} \tau_\varepsilon^p \wedge \omega^{n-p} \geq \lambda$, où $\lambda > 0$ est défini dans l'énoncé du lemme. Puisque $\tau_\varepsilon^p$ est borné en cohomologie, on peut trouver une valeur d'adhérence $T = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau_\varepsilon^p$,

qui est alors un $(p,p)$-courant positif fermé dans la classe $\alpha^p$, et tel que $\int_Y T\wedge\omega^{n-p}\geq\lambda$, qed.
Retournons maintenant à la preuve du théorème 3.1.11. Rappelons que $(X,\omega)$ est une variété kählerienne compacte avec $v(\omega)=\int\omega^n=1$, $T_k\geq-\varepsilon_k\omega$ est une suite de courants à singularités analytiques dans la classe $\alpha\in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$, et une suite de modifications $\mu_k : X_k\to X$ a été choisie de sorte que $\mu_k^\star T_k=R_k+[E_k]$ avec $R_k$ lisse. Le volume de la classe nef $\alpha_k:=\{R_k+\varepsilon_k\mu_k^\star\omega\}$ est uniformément minoré par $c>0$. On note $\widetilde{\mu}_k:\widetilde{X}_k\to\widetilde{X}$ l'application produit $\mu_k\times\mu_k : X_k\times X_k\to X\times X$, et l'on choisit sur chaque $\widetilde{X}_k$ une forme kählerienne $\widetilde{\omega}_k$. Sur $\widetilde{X}$, on pose $\widetilde{\omega}:=p^\star\omega+q^\star\omega$, et $\widetilde{\alpha}_k:=p_k^\star\alpha_k+q_k^\star\alpha_k$, où $p$ et $q$ (resp. $p_k$ et $q_k$) sont les deux projections $X\times X\to X$ (resp. $X_k\times X_k\to X_k$). Un calcul aisé montre que $v(\widetilde{\alpha}_k)=\binom{2n}{n}v(\alpha_k)^2\geq c>0$ pour un $c>0$. On note enfin $\Delta$ (resp. $\Delta_k$) la diagonale dans $\widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{X}_k$).

**Lemme 3.1.34** *Il existe une constante $\eta>0$ telle que, pour tout $k$, la classe $\widetilde{\alpha}_k^n$ contienne un $(n,n)$-courant positif fermé $\Theta_k$ avec*

$$\Theta_k\geq\eta[\Delta_k].$$

**Démonstration** : si l'on applique le lemme 3.1.32 à $Y=\Delta$, on obtient une base de voisinages $V_\varepsilon$ de $\Delta$, une famille de formes kähleriennes $\omega_\varepsilon\geq 1/2\widetilde{\omega}$ dans $\{\widetilde{\omega}\}$, et une borne uniforme $\delta>0$ telles que $\int_{V_\varepsilon}\omega_\varepsilon^n\wedge\omega^n\geq\delta$ pour tout $\varepsilon>0$.
On fixe maintenant $k$ et $\rho>0$, que l'on va laisser tendre vers 0 par la suite. Travaillant sur $\widetilde{X}_k$, on pose

$$\omega_k:=\widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}+\rho\widetilde{\omega}_k,$$

et l'on a une famille

$$\omega_{k,\varepsilon}:=\widetilde{\mu}_k^\star\omega_\varepsilon+\rho\widetilde{\omega}_k$$

de formes kähleriennes dans la classe $\{\omega_k\}$ telle que $\omega_{k,\varepsilon}\geq 1/2\omega_k$. La famille $V_{k,\varepsilon}:=\widetilde{\mu}_k^{-1}(V_\varepsilon)$ définit une base de voisnages de $Y_k:=\widetilde{\mu}_k^{-1}(\Delta)$, et l'on a $\int_{V_{k,\varepsilon}}\omega_{k,\varepsilon}^n\wedge\omega_k^n\geq\delta>0$ pour le même $\delta>0$ que sur $\widetilde{X}$. Puisque $\widetilde{\alpha}_k$ est une classe nef avec un volume non nul, le lemme 3.1.33 dit qu'il existe un $(n,n)$-courant positif fermé $U_k$ dans $\widetilde{\alpha}_k^n$ tel que

$$\int_{Y_k}U_k\wedge\omega_k^n\geq\lambda_k,$$

avec $\lambda_k=C_n\delta^2c/(\int\widetilde{\alpha}_k^n\wedge\omega_k^n)v(\omega_k)>0$ puisque $v(\widetilde{\alpha}_k)\geq c>0$.
Comme on l'a dit, ces données dépendent de $\rho>0$. On peut donc trouver

une valeur d'adhérence $\Theta_k = \lim_{\rho\to 0} U_k(\rho)$, qui est un $(n,n)$-courant positif fermé dans $\widetilde{\alpha}_k^n$ tel que

$$\int_{Y_k} \Theta_k \wedge \widetilde{\mu}_k^\star \widetilde{\omega}^n \geq \eta_k,$$

avec $\eta_k = C_n\delta^2 c/(\int \widetilde{\alpha}_k^n \wedge \widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}^n)v(\widetilde{\omega})$ parce que $\omega_k = \widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega} + \rho\widetilde{\omega}_k \to \widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}$ quand $\rho \to 0$, et $v(\widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}) = v(\widetilde{\omega})$.
On en déduit que

$$\int_{\Delta_k} \Theta_k \wedge \widetilde{\mu}_k^\star \widetilde{\omega}^n \geq \eta_k,$$

puisque toutes les composantes de $Y_k = \widetilde{\mu}_k^{-1}(\Delta)$ distinctes de $\Delta_k$ sont envoyées par $\widetilde{\mu}_k$ sur un ensemble analytique de dimension $< n$, que le $(n,n)$-courant positif fermé $\widetilde{\mu}_{k,\star}\Theta_k$ ne peut charger. Par la décomposition de Siu, on a $\Theta_k \geq \chi_{\Delta_k}\Theta_k = \nu(\Theta_k,\Delta_k)[\Delta_k]$, où $\nu(\Theta_k,\Delta_k)$ est le nombre de Lelong générique de $\Theta_k$ le long de $\Delta_k$, et $\chi_{\Delta_k}$ est la fonction caractéristique ; notre objectif est maintenant de montrer que $\nu(\Theta_k,\Delta_k)$ est uniformément minoré par un nombre $> 0$, ce qui conclura la preuve du lemme 3.1.34.Puisque $\int[\Delta_k] \wedge \widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}^n = \int[\Delta] \wedge \widetilde{\omega}^n$, on déduit que

$$\nu(\Theta_k,\Delta_k)\int[\Delta] \wedge \widetilde{\omega}^n = \int_{\Delta_k} \Theta_k \wedge \widetilde{\mu}_k^\star \widetilde{\omega}^n \geq \eta_k,$$

donc il reste à contrôler $\eta_k = C_n\delta^2 c/(\int \widetilde{\alpha}_k^n \wedge \widetilde{\mu}_k^\star\widetilde{\omega}^n)v(\widetilde{\omega})$. Il suffit de majorer $\int_{X_k\times X_k} \widetilde{\alpha}_k^n \wedge \widetilde{\mu}_k^\star\omega^n$ uniformément. Mais cette dernière intégrale s'exprime en fonction de $\int_{X_k} \alpha_k^l \wedge \mu_k^\star\omega^{n-l} = \int_X (T_{k,ac}+\varepsilon_k\omega)^l \wedge \omega^{n-l}$, $l = 0,...,n$, qui sont toutes sous contrôle uniforme grâce au théorème 3.1.10. La preuve du lemme est terminée.
On peut maintenant terminer la preuve du théorème 3.1.11. Soient $p,q$ les deux projections $\widetilde{X}_k = X_k \times X_k \to X_k$. Puisque $\tau_k := \mu_k^\star\omega$ est une forme lisse positive sur $X_k$, le courant $S_k := q_\star(T_k \wedge p^\star\tau_k)$ est un $(1,1)$-courant positif fermé dans la classe $((\alpha_k\times\alpha_k)^n)_\star(\tau_k)$, tel que $S_k \geq \eta q_\star([\Delta_k]\wedge p^\star\tau_k) = \eta\tau_k$. On calule facilement que la classe $(\widetilde{\alpha_k}^n)_\star(\tau_k)$ est juste $n(\int \alpha_k^{n-1}\wedge\tau_k)\alpha_k$, de sorte que $P_k := (n(\int \alpha_k^{n-1}\wedge\tau_k)^{-1}S_k$ est un courant positif fermé dans $\alpha_k$ avec $P_k \geq c_k\mu_k^\star\omega$ pour $c_k := (n(\int\alpha_k^{n-1}\wedge\tau_k)^{-1}\eta$. Finalement, le poussé en avant $\mu_{k,\star}P_k$ est un courant kählerien sur $X$, minoré par $c_k\omega$, et qui appartient à la classe $\mu_{k,\star}\alpha_k = \alpha+\varepsilon_k\{\omega\}$. Puisque $\varepsilon_k \to 0$, il reste donc à s'assurer que $(\int\alpha_k^{n-1}\wedge\tau_k)^{-1}$ reste loin de 0. Mais on a $\int\alpha_k^{n-1}\wedge\tau_k = \int(\theta_k+\varepsilon_k\mu_k^\star\omega)^{n-1}\wedge\mu_k^\star\omega = \int_X(T_{k,ac}+\varepsilon_k\omega)^{n-1}\wedge\omega$, et cette dernière quantité est uniformément bornée par le théorème 3.1.10. Qed.

**Corollaire 3.1.35** *Le volume $v : H^{1,1}(X,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est une fonction continue.*

**Démonstration** : vu la proposition 3.1.26 et le fait que l'on a posé $v(\alpha) = 0$ pour toute $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ hors de $\mathcal{E}$, la continuité du volume est équivalent au fait que $v(\alpha) = 0$ pour $\alpha \in \partial\mathcal{E}$, ce qui est exactement l'assertion du théorème 3.1.11.

### 3.1.8 Une conjecture.

Si $X$ est une variété de Fujiki, les résultats sur le volume restent valables. Réciproquement, il est tentant de penser que le théorème 3.1.11 caractérise les classes grosses sur une variété complexe compacte quelconque, ce qui revient à la

**Conjecture** : Si une variété complexe compacte $X$ admet un $(1,1)$-courant positif fermé $T$ tel que $\int_X T_{ac}^n > 0$, alors $X$ est une variété de Fujiki.

Cette conjecture est vraie pour $\dim X = 2$. En effet, soit $T$ un tel courant, et soit $T = R + \sum \nu(T, D)[D]$ sa décomposition de Siu. Le lieu non-nef de la classe $\{R\}$ est alors une réunion dénombrable de points, de sorte que $\{R\}$ est nef par le corollaire 2.1.7. On a donc $\{R\}^2 \geq \int_X R_{ac}^2 > 0$ par le lemme 3.1.28 (qui est valable sur toutes les surfaces, kähleriennes ou non, comme on l'a remarqué). Mais la forme d'intersection sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ n'est donc pas définie négative, et ceci force $b_1(X)$ a être pair par des considérations classiques dues à Kodaira (cf. par exemple [Lam99]). D'après le résultat principal de [Lam99] ou [Buc99], $X$ est donc une surface kählerienne, et la conjecture est vraie dans ce cas.

## 3.2 Nombres d'intersections mobiles

### 3.2.1 Définition et propriétés

Soit $X$ une variété kählerienne compacte munie d'une forme kählerienne $\omega$. On considère un sous-ensemble analytique $Y \subset X$ de dimension $p$ et des classes pseudoeffectives $\alpha_1, ..., \alpha_p \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Notre but est de définir un nombre d'intersections "positif" $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot Y)_{\geq 0}$ comme étant le nombre d'intersection usuel $(\beta_1 \cdot ... \cdot \beta_p \cdot Y)$, où $\beta_i$ désigne la partie nef de $\alpha_i$ dans sa décomposition de Zariski. Par exemple, on souhaiterait que $(\alpha^n)_{\geq 0}$ (avec $Y = X$) soit le volume de $\alpha$. La décomposition de Zariski de $\alpha_i$ n'existe hélas pas en général, mais on sait comment en construire une bonne approximation en regardant les courants à singularités analytiques dans $\alpha_i$. A la place de $Y$, on peut mettre un courant positif fermé quelconque $\Theta$ de bidimension $(p, p)$, et l'on arrive à la

**Définition 3.2.1** *Le nombre d'intersections mobiles $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$ des $\alpha_i$ et de $\Theta$ est défini comme la limite quand $\varepsilon > 0$ tend vers $0$ de la quantité*

$$\sup \int_{X-F} (T_1 + \varepsilon\omega) \wedge ...(T_p + \varepsilon\omega) \wedge \Theta,$$

*où $T_i$ décrit l'ensemble des courants à singularités analytiques dans $\alpha_i[-\varepsilon\omega]$, et $F$ désigne la réunion des $Sing(T_i)$.*

Plusieurs remarques s'imposent : tout d'abord, les intégrales considérées convergent d'après le théorème 3.1.12, et le supremum est même fini puisque les intégrales en question peuvent se majorer en fonction des seules classes de cohomologie des courants impliqués. Ensuite, il est assez clair que le supremum en question croît avec $\varepsilon$, de sorte que la limite considérée existe et est aussi l'infimum pour $\varepsilon > 0$. Enfin, la définition ne dépend pas de la forme kählerienne $\omega$, comme on le vérifie facilement en utilisant que deux formes kähleriennes sur $X$ sont toujours commensurables.
Il est trivial de vérifier que $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$ est symétrique en les $\alpha_i$, et est concave et homogène sur le cône pseudoeffectif $\mathcal{E}$ en chaque variable séparément.
On commence par vérifier que la définition redonne bien le nombre d'intersection ordinaire lorsque les $\alpha_i$ sont nef :

**Proposition 3.2.2** *Si les $\alpha_i \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ sont nef, on a $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0} = (\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \{\Theta\})$.*

**Démonstration** : soit $\varepsilon > 0$, $T_i \in \alpha_i[-\varepsilon\omega]$ un courant à singularités analytiques, et $F$ la réunion de leurs lieux singuliers. On pose $S_i := T_i + \varepsilon\omega$ et $\beta_i = \alpha_i + \varepsilon\{\omega\}$.

**Lemme 3.2.3** *On a*

$$\int_{X-F} S_1 \wedge ... \wedge S_p \wedge \Theta \leq (\beta_1 \cdot ... \cdot \beta_p \cdot \{\Theta\}).$$

**Démonstration** : on reprend la preuve du lemme 3.1.28 : pour chaque $i$, on écrit $S_i = \theta_i + dd^c\varphi_i$ avec $\theta_i \in \beta_i$ lisse, et le théorème 3.1.7 nous fournit une suite $S_i^{(k)} = \theta_i + dd^c\varphi_i^{(k)}$ de formes lisses telles que
(i) $\varphi_i^{(k)}$ décroît vers $\varphi_i$ partout lorsque $k \to +\infty$, et la convergence a lieu dans $C^\infty$ sur $X - F$ (ceci vient du fait que $\varphi_i^{(k)}$ est obtenue localement par convolution avec un noyau régularisant).
(ii) $S_i^{(k)} \geq -C\lambda_i^{(k)}\omega$, avec $C > 0$ ne dépendant que de $(X, \omega)$ et $\lambda_i^{(k)}$ une suite de fonctions continues qui décroît vers $\nu(S_i, x)$ en tout point $x$.
Comme $\beta_i = \alpha_i + \varepsilon\{\omega\}$ est une classe kählerienne, on peut aussi choisir une fonction $u_i$ lisse telle que $\theta_i + dd^c u_i$ soit une forme kählerienne pour

tout $i$. Soit maintenant $\psi$ une fonction lisse sur $X$, à support compact dans $U \subset\subset X - F$, et telle que $0 \leq \psi \leq 1$ partout. Comme dans la preuve du théorème 3.1.8, on va modifier $\varphi_i^{(k)}$ sur $X - U$ de façon à rendre la partie négative de $T_i^{(k)}$ petite même sur cet ensemble. On pose pour cela $v_i^{(k)} = \max_\eta(u_i - C_k, \varphi_i^{(k)})$, où $\max_\eta$ est une fonction maximum régularisée une fois pour toutes, et $C_k > 0$ est suffisamment grande pour que $v_i^{(k)} = \varphi_i^{(k)}$ sur $U$. La nouvelle fonction $v_i^{(k)}$ converge encore vers $\varphi_i$ dans $C^\infty(U)$ lorsque $k \to +\infty$, mais on a gagné le fait que $V_i^{(k)} := \theta_i + dd^c v_i^{(k)} \geq -\varepsilon_k \omega$ pour une suite $\varepsilon_k > 0$ convergeant vers 0 (ceci parce que $\lambda_i^{(k)}$ converge uniformément vers 0 sur $U$ d'après le théorème de Dini, puisque $\nu(S_i, x) = 0$ pour tout $x \in U$.) On finit maintenant la preuve : $\int_X \psi S_1 \wedge ... \wedge S_p \wedge \Theta$ est la limite pour $k \to +\infty$ de $\int_X \psi(V_1^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge ... \wedge (V_p^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge \Theta$, qui est majorée par $\int_X (V_1^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge ... \wedge (V_p^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge \Theta = (\beta_1 + \varepsilon_k\{\omega\}) \cdot ...(\beta_p + \varepsilon_k\{\omega\}) \cdot \{\Theta\}$. Comme ceci a lieu pour toutes les fonctions $\psi$ comme ci-dessus, la preuve du lemme est terminée.

Le lemme donne bien sûr l'inégalité $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0} \leq (\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \{\Theta\})$. Pour obtenir l'autre inégalité, il suffit simplement de choisir pour tout $\varepsilon > 0$ un forme kählerienne $\omega_i$ dans $\alpha_i + \varepsilon\{\omega\}$. Le courant $T_i := \omega_i - \varepsilon\omega$ est alors un élément lisse de $\alpha_i[-\varepsilon\omega]$, et le supremum de la définition 3.2.1 vaut donc au moins $\int_X (T_1 + \varepsilon\omega) \wedge ... \wedge (T_p + \varepsilon\omega) \wedge \Theta = (\alpha_1 + \varepsilon\{\omega\}) \cdot ... \cdot (\alpha_1 + \varepsilon\{\omega\}) \cdot \{\Theta\}$. Il reste à faire $\varepsilon \to 0$.

On étudie maintenant la continuité des nombres d'intersections mobiles :

**Proposition 3.2.4** *Pour tout courant positif fermé $\Theta$ de bidimension $(p,p)$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*
*(i) $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$ est une fonction semi-continue supérieurement de $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{E}^p$. Elle est continue en $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathcal{E}^p$ si les $\alpha_i$ sont grosses et $\Theta$ ne charge pas leurs lieux non kähleriens.*
*(ii) Si $\beta_i^{(k)}$ est une suite de classes pseudoeffectives qui converge vers 0 lorsque $k \to +\infty$, on a*

$$\lim_{k\to+\infty}((\alpha_1 + \beta_1^{(k)}) \cdot ... \cdot (\alpha_p + \beta_p^{(k)}) \cdot \Theta)_{\geq 0} = (\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}.$$

**Démonstration** : si $\alpha_i^{(k)}$ est une suite de classes pseudoeffectives convergeant vers $\alpha_i$ pour tout $i = 1, ..., p$, on peut choisir une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant vers 0 et des courants à singularités analytiques $T_i^{(k)} \in \alpha_i[-\varepsilon_k\omega]$ tels que

$$\int_{X-F_k} (T_1^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge ... \wedge (T_p^{(k)} + \varepsilon_k\omega)\Theta - (\alpha_1^{(k)} \cdot ... \cdot \alpha_p^{(k)} \cdot \Theta)_{\geq 0}$$

converge vers 0. Puisque $\alpha_i - \alpha_i^{(k)}$ est une suite de classes convergeant vers 0 lorsque $k \to \infty$, on peut en trouver des représentants lisses $\theta_i^{(k)}$ convergeant vers 0 dans $C^\infty$. On aura donc $\theta_i^{(k)} \geq -\delta_k\omega$ pour une suite $\delta_k > 0$ convergeant vers 0. Mais alors $T_i^{(k)} + \theta_i^{(k)}$ est un courant à singularités analytiques dans $\alpha_i[-(\varepsilon_k + \delta_k)\omega]$, donc la limsup pour $k \to \infty$ de

$$\int_{X-F_k} (T_1^{(k)} + \theta_1^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge ... \wedge (T_p^{(k)} + \theta_p^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge \Theta$$

est inférieure à $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$ par définition de cette dernière quantité. Il reste à remarquer que la différence entre

$$\int_{X-F_k} (T_1^{(k)} + \theta_1^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge ... \wedge (T_p^{(k)} + \theta_p^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge \Theta$$

et

$$\int_{X-F_k} (T_1^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge ... \wedge (T_p^{(k)} + \varepsilon_k\omega)\Theta$$

est une somme d'intégrales du type

$$\int_{X-F_k} \wedge_{i\in I}(\theta_i^{(k)} + \delta_k\omega) \wedge \wedge_{j\in J}(T_j^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge \Theta.$$

Comme la masse du courant $\wedge_{j\in J}(T_j^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge \Theta$ sur les points lisses des $T_j^{(k)}$ est uniformément contrôlée par les classes de cohomologies des courants en question d'après le théorème 3.1.12 et comme $\theta_i^{(k)} + \delta_k\omega$ converge vers 0 dans $C^\infty$ lorsque $k \to \infty$, on voit que chacune des intégrales

$$\int_{X-F_k} \wedge_{i\in I}(\theta_i^{(k)} + \delta_k\omega) \wedge \wedge_{j\in J}(T_j^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge \Theta$$

converge 0. Ainsi, la limsup de

$$\int_{X-F_k} (T_1^{(k)} + \theta_1^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge ... \wedge (T_p^{(k)} + \theta_p^{(k)} + (\varepsilon_k + \delta_k)\omega) \wedge \Theta$$

qui est inférieure à $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$, est aussi la limsup de $(\alpha_1^{(k)} \cdot ... \cdot \alpha_p^{(k)} \cdot \Theta)_{\geq 0}$. Ceci démontre la semi-continuité supérieure.
On suppose maintenant que les classes $\alpha_i^{(k)}$ convergent vers la classe grosse $\alpha_i$ pour tout $i$.

**Lemme 3.2.5** *Si les $\alpha_i$ sont grosse et $\Theta$ ne porte pas de massse sur les lieux non kähleriens des $\alpha_i$, alors $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0}$ vaut*

$$\sup \int_{X-F} T_1 \wedge ... \wedge T_p \wedge \Theta,$$

*où $T_i \in \alpha_i$ parcourt les courants kähleriens à singularités analytiques et $F$ est la réunion des $Sing(T_i)$.*

**Démonstration** : d'après le théorème 2.1.20, quitte à changer la forme kählerienne $\omega$, on peut supposer qu'il existe un courant kählerien à singularités analytiques $S_i \in \alpha_i$, singulier exactement le long du lieu non kählerien de $\alpha_i$, et tel que $S_i \geq 2\omega$ pour tout $i$. On choisit alors une suite $\varepsilon_k > 0$ tendant vers zéro et des courants à singularités analytiques $T_i^{(k)} \in \alpha_i[-\varepsilon_k\omega]$ tels que

$$\int_{X-F_k}(T_1^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge...\wedge(T_p^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge\Theta$$

converge vers $(\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_p\cdot\Theta)_{\geq 0}$ lorsque $k\to\infty$. On remarque que

$$U_i^{(k)}:=(1-\varepsilon_k)T_i^{(k)}+\varepsilon_k S_i$$

est un courant kählerien à singularités analytiques dans $\alpha_i$, donc il suffit pour montrer le lemme de voir que la limsup de $\int_{X-G_k}U_1^{(k)}\wedge...\wedge U_p^{(k)}\wedge\Theta$ lorsque $k\to\infty$ est au moins égale à $(\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_p\cdot\Theta)_{\geq 0}$. On a noté $G_k$ la réunion de $F_k$ et des $L_{kah}(\alpha_i)$ =Sing$(S_i)$. Or on a

$$\int_{X-G_k}U_1^{(k)}\wedge...\wedge U_p^{(k)}\wedge\Theta=(1-\varepsilon_k)^n\int_{X-G_k}(T_1^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge...\wedge(T_p^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge\Theta+O(\varepsilon_k)$$

grâce au contrôle uniforme de la masse par les classes de cohomologie. Il reste finalement à remarquer que $\int_{X-G_k}(T_1^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge...\wedge(T_p^{(k)}+\varepsilon_k\omega)\wedge\Theta=\int_{X-F_k}...$ puisque $\Theta$ ne charge pas $G_k-F_k$ par hypothèse. Le lemme suit.

On choisit maintenant grâce au lemme des courants kählériens à singularités analytiques $T_i\in\alpha_i$ tels que $\int_{X-F}T_1\wedge...\wedge T_p\wedge\Theta$ soit très proche de $(\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_p\cdot\Theta)_{\geq 0}$. Puisque $\alpha_i^{(k)}$ converge vers $\alpha_i$, on peut choisir un représentant lisse $\theta_i^{(k)}$ de $\alpha_i^{(k)}-\alpha_i$ qui converge vers 0 dans $C^\infty$. Alors $T_i+\theta_i^{(k)}$ est un courant kählerien dans $\alpha_i^{(k)}$ pour $k$ assez grand, donc on a

$$(\alpha_1^{(k)}\cdot...\alpha_p^{(k)}\cdot\Theta)_{\geq 0}\geq\int_{X-F}(T_1+\theta_1^{(k)})\wedge...\wedge(T_p+\theta_p^{(k)})\wedge\Theta.$$

Comme $\theta_i^{(k)}$ tend vers 0 pour $k\to\infty$, le contrôle uniforme de la masse montre à nouveau que $\int_{X-F}(T_1+\theta_1^{(k)})\wedge...\wedge(T_p+\theta_p^{(k)})\wedge\Theta$ converge vers $\int_{X-F}T_1\wedge...\wedge T_p\wedge\Theta$ pour $k\to\infty$. On déduit de tout ceci que

$$(\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_p\cdot\Theta)_{\geq 0}\leq\liminf(\alpha_1^{(k)}\cdot...\alpha_p^{(k)}\cdot\Theta)_{\geq 0},$$

et la continuité en $(\alpha_1,...,\alpha_p)$ est démontrée.

Le point (ii) est maintenant trivial grâce à la semi-continuité supérieure, puisqu'on a clairement $((\alpha_1+\beta_1^{(k)})\cdot...\cdot(\alpha_p+\beta_p^{(k)})\cdot\Theta)_{\geq 0}\geq(\alpha_1\cdot...\cdot\alpha_p\cdot\Theta)_{\geq 0}$ pour tout $k$.

Une des raisons d'être des nombres d'intersections mobiles est la propriété suivante :

**Proposition 3.2.6** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective. Alors son volume vérifie $v(\alpha) = (\alpha^n)_{\geq 0}$.*

**Démonstration** : on a vu (lemme 3.1.25) qu'il existe une suite $T_\varepsilon \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ de courants à singularités analytiques tels que $\int_X (T_\varepsilon + \varepsilon\omega)^n_{ac}$ converge vers le volume $v(\alpha)$. L'intégrale $\int_X (T_\varepsilon + \varepsilon\omega)^n_{ac}$ n'est pas autre chose que l'intégrale de $(T_\varepsilon + \varepsilon\omega)^n$ sur ses points lisses, et on en déduit immédiatement que $v(\alpha) \leq (\alpha^n)_{\geq 0}$. Pour obtenir l'inégalité réciproque, on montre plus généralement le

**Lemme 3.2.7** *Si $\alpha$, $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_p$ sont des classes pseudoeffectives, alors $(\alpha^k \cdot \alpha_{k+1} \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0}$ est la limite quand $\varepsilon \to 0$ de*

$$\sup \int_{X-F} (T + \varepsilon\omega)^k \wedge (T_{k+1} + \varepsilon\omega) \wedge ... \wedge (T_n + \varepsilon_k\omega)$$

*où $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ et les $T_i \in \alpha_i[-\varepsilon\omega]$ sont à singularités analytiques.*

**Démonstration** : il est clair que $(\alpha^k \cdot \alpha_{k+1} \cdot ... \cdot \alpha_p)_{\geq 0}$ vaut au moins la limite en question. Réciproquement, on choisit $\varepsilon > 0$ et des courants $T_1, ...T_k \in \alpha[-\varepsilon\omega]$, $T_i \in \alpha_i[-\varepsilon\omega]$ à singularités analytiques tels que $\int_{X-F}(T_1 + \varepsilon\omega) \wedge ... \wedge (T_n + \varepsilon\omega)$ soit proche de $(\alpha^k \cdot \alpha_{k+1} \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0}$. Il existe alors une résolution commune de leurs singularités $\mu : Y \to X$, et on a donc $\mu^\star T_i = R_i + [D_i]$ avec $R_i$ lisse et $D_i$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif. On note que pour $i = 1, ..., k$, $\mu^\star T_i$ appartient à $\mu^\star\alpha[-\varepsilon\mu^\star\omega]$. Il existe donc un courant $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ tel que $\mu^\star T = \min_{1 \leq i \leq k} T_i$ dans cet ensemble ordonné par la comparaison des singularités. On a alors clairement $\mu^\star T = R + [D]$ avec $R$ à potentiel localement borné, et $D$ le pgcd de $D_1, ..., D_k$. Soit $\widetilde{\Theta}$ la transformée stricte de $\Theta$ sous $\mu$. Je dis que

$$\int_Y (R+\varepsilon\mu^\star\omega)^k \wedge (R_{k+1}+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge ... \wedge (R_n+\varepsilon\mu^\star\omega) \geq \int_Y (R_1+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge ... \wedge (R_n+\varepsilon\mu^\star\omega).$$

En fait, la classe $\{R - R_1\} = \{D_1 - D\}$ est pseudoeffective, et donc

$$\int_Y (R+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge (R_2+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge ... \wedge (R_n+\varepsilon\mu^\star\omega) \geq \int_Y (R_1+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge ... \wedge (R_n+\varepsilon\mu^\star\omega)$$

puisque chaque classe $\{R_i + \varepsilon\omega\}$ est nef. En itérant, on obtient l'inégalité en question. Il reste maintenant à remarquer que

$$\int_Y (R+\varepsilon\mu^\star\omega)^k \wedge (R_{k+1}+\varepsilon\mu^\star\omega) \wedge ... \wedge (R_n+\varepsilon\mu^\star\omega) = \int_{X-F} (T+\varepsilon\omega)^k \wedge (T_{k+1}+\varepsilon\omega) \wedge ... \wedge (T_n+\varepsilon\omega)$$

pour conclure la preuve du lemme, et celle de la proposition 3.2.6 par la même occasion.

Le lemme précédent permet d'obtenir la version suivante du théorème d'approximation de Fujita :

**Proposition 3.2.8** *Soit $\alpha$ et $\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n$ des classes pseudoeffectives. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, une modification $\mu : Y \to X$ et des décompositions $\mu^\star(\alpha + \varepsilon\{\omega\}) = \beta + \{D\}$ et $\mu^\star(\alpha_i + \varepsilon\{\omega\}) = \beta_i + \{D_i\}$ tels que :*

*(i) $\beta$ et les $\beta_i$ sont des classes kähleriennes.*

*(ii) $|(\alpha^k \cdot \alpha_{k+1} \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0} - (\beta^k \cdot \beta_{k+1} \cdot ... \cdot \beta_n)| < \delta$.*

La preuve est en tout point semblable à celle du théorème 3.1.24 une fois qu'on dispose du lemme 3.2.5.

Les inégalités de concavité de Hovanski-Tessier (cf. [Dem93]), vérifiées par des classes nef, s'étendent aux nombres d'intersections mobiles de classes pseudoeffectives :

**Théorème 3.2.9** *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ des classes pseudoeffectives. Alors :*

$$(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n)^n_{\geq 0} \geq (\alpha_1^n)_{\geq 0} ... (\alpha_n^n)_{\geq 0}.$$

**Démonstration** : si $\omega$ est une forme kählerienne de volume 1, le théorème 3.1.21 dit qu'il existe un courant positif fermé $T_i \in \alpha_i$ tel que $T_{i,ac}(x)^n = v(\alpha_i)\omega(x)^n$ presque partout. D'après le théorème 3.1.8, on peut trouver des suites $T_i^{(k)}$ de courants à singularités analytiques dans $\alpha[-\varepsilon_k\omega]$ tels que $T_i^{(k)}(x)$ converge vers $T_{i,ac}(x)$ presque partout. D'après le lemme de Fatou, on a donc

$$\int_X T_{1,ac} \wedge ... \wedge T_{n,ac} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X (T_1^{(k)} + \varepsilon_k\omega) \wedge ... \wedge (T_n^{(k)} + \varepsilon_k\omega),$$

et *a fortiori* $\int_X T_{1,ac} \wedge ... \wedge T_{n,ac} \leq (\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0}$. Par ailleurs, la version ponctuelle des inégalités de Hovanskii-Tessier implique que $T_{1,ac}(x) \wedge ... \wedge T_{n,ac}(x) \geq \det(T_{1,ac}(x))^{1/n} ... \det(T_{n,ac}(x))^{1/n}\omega(x)^n$, et donc en intégrant $\int_X T_{1,ac} \wedge ... \wedge T_{n,ac} \geq v(\alpha_1)^{1/n} ... v(\alpha_n)^{1/n}$, qed.

Pour terminer, nous montrons que les nombres d'intersections mobiles sont compatibles avec la décomposition de Zariski divisorielle :

**Proposition 3.2.10** *Si $\alpha_1, ..., \alpha_n \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ sont des classes pseudoeffectives, on a*

$$(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n)_{\geq 0} = (Z(\alpha_1) \cdot ... \cdot Z(\alpha_n))_{\geq 0}.$$

**Démonstration** : l'application $T \mapsto T - [N(\alpha)]$ établit une bijection entre les courants positifs fermés dans $\alpha$ et ceux dans $Z(\alpha)$. Comme le courant d'intégration $[N(\alpha)]$ est bien sûr singulier par rapport à la mesure de Lebesgue, on a bien $T_{ac} = (T - [N(\alpha)])_{ac}$, et l'égalité désirée est vérifiée dans le cas où les $\alpha_i$ sont grosse d'après le lemme 3.2.5. Pour le cas général, on remarque que $Z(\alpha + \varepsilon\{\omega\}) - Z(\alpha)$ est une classe pseudoeffective qui tend vers 0 avec $\varepsilon$. Il suffit donc d'appliquer le point (ii) de la proposition 3.2.4.

**Remarques** :
(i) Sur une surface $X$, $Z(\alpha)$ est bien la partie nef de la classe $\alpha$ dans sa décomposition de Zariski, et la proposition 3.2.2 montre que $(\alpha \cdot \beta)_{\geq 0}$ n'est autre que le nombre d'intersections $Z(\alpha) \cdot Z(\beta)$ des parties nef des deux classes.
(ii) Ce résultat montre aussi que le nombre d'intersections mobiles n'est pas continu sur le cône pseudoeffectif tout entier en général. En effet, si $\alpha_k$ est une suite de classes exceptionnelles qui converge vers une classe nef $\alpha \neq 0$ (sur une surface par exemple), alors $(\alpha_k \cdot \beta)_{\geq 0} = 0$ pour toute classe kählerienne $\beta$, alors qu'à la limite $(\alpha \cdot \beta)_{\geq 0} = \alpha \cdot \beta$ est non nulle.

### 3.2.2 Dimension numérique et théorème d'annulation de Bogomolov

En utilisant les nombres d'intersections mobiles, on peut définir la dimension numérique $\nu(\alpha)$ d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ comme étant la dimension numérique de sa partie nef (dans sa décomposition de Zariski virtuelle), i.e. $\nu(\alpha)$ est le plus grand entier $k \geq 0$ tel que $(\alpha^k \cdot \omega^{n-k})_{\geq 0} > 0$ pour une (et donc toute) classe kählerienne $\omega$. D'après la proposition 3.2.6 et le théorème 3.1.31, $\alpha$ est grosse ssi sa dimension numérique est maximale, i.e. $\nu(\alpha) = \dim X$. A l'autre bout du spectre, on a :

**Proposition 3.2.11** *Une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est de dimension numérique $0$ ssi $Z(\alpha) = 0$.*

**Démonstration** : comme $(\alpha \cdot \omega^{n-1})_{\geq 0} = (Z(\alpha) \cdot \omega^{n-1})_{\geq 0}$, on peut supposer que $\alpha = Z(\alpha)$ est nef en codimension 1. On suppose que $\alpha$ est de dimension numérique nulle. Comme $\alpha$ est nef en codimension 1, il existe une famille $T_\varepsilon$ de courants dans $\alpha[-\varepsilon\omega]$ à singularités analytiques le long d'un ensemble analytique $A_\varepsilon$ de codimension au moins deux, et l'intégrale $\int_{X-A_\varepsilon}(T_\varepsilon + \varepsilon\omega) \wedge \omega^{n-1}$ tend vers 0 avec $\varepsilon$ puisque $\alpha$ est de dimension numérique nulle. Mais $T_\varepsilon + \varepsilon\omega$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$, et ne charge donc pas $A_\varepsilon$, qui est de codimension $> 1$. Ainsi, $\int_X (T_\varepsilon + \varepsilon\omega) \wedge \omega^{n-1} = (\alpha + \varepsilon\{\omega\}) \wedge \{\omega\}^{n-1}$ elle-même tend vers 0, et on en déduit que $\alpha = 0$ à la limite.

Afin d'illustrer cette notion, nous allons démontrer la version suivante du théorème d'annulation de Bogomolov, qui améliore celle donnée par C.Mourougane dans [Mou98] :

**Théorème 3.2.12** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte, et $L$ un fibré en droites pseudoeffectif sur $X$. Alors $H^0(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(-L)) = 0$ pour tout $p < \nu(L)$*

**Démonstration** : la démonstration suit point par point celle de [Mou98] *mutatis mutandis*. Soit $\omega$ une forme kählerienne de volume 1, et posons $\alpha = c_1(L)$. On fixe également une métrique lisse $h$ sur $L$. On commence par remarquer que $v(\alpha+\varepsilon\omega) \geq \varepsilon^{n-l}(\alpha^l \cdot \omega^{n-l})_{\geq 0}$ pour tout $0 \leq l \leq n$. Si l'on prend $l := \nu(\alpha)$, on voit donc qu'il existe $C > 0$ telle que $v(\alpha+\varepsilon\omega) \geq C\varepsilon^{n-l}$. D'après le théorème 3.1.21, on peut choisir pour tout $\varepsilon > 0$ un courant $T_\varepsilon \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ tel que

$$(T_{ac}(x) + \varepsilon\omega(x))^n = v(\alpha + \varepsilon\omega)\omega(x)^n$$

pour presque tout $x \in X$. Si l'on note $\lambda_1^\varepsilon \leq ... \leq \lambda_n^\varepsilon$ les valeurs propres de $T_{\varepsilon,ac}$ relativement à $\omega$, on a donc

$$(\lambda_1^\varepsilon + \varepsilon\omega)...(\lambda_n^\varepsilon + \varepsilon\omega) \geq C\varepsilon^{n-l}$$

presque partout. On a besoin de la version singulière suivante de l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano :

**Lemme 3.2.13** *Soit $T = \Theta_h(L) + dd^c\varphi$ le courant de courbure de la métrique hermitienne singulière $he^{-2\varphi}$ sur $L$, et supposons $T$ presque positif.*
*Si $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ désignent les valeurs propres de $T_{ac}$, alors pour tout $u \in H^0(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(-L))$ on a :*

$$\int_X (\lambda_1 + ... + \lambda_{n-p})|u|^2 e^{2\varphi} dV_\omega \leq 0,$$

*où $|u|^2$ désigne la norme ponctuelle de $u$ induite par les métriques $\omega$ sur $T_X$ et $h$ sur $L$.*

**Démonstration** : d'après le théorème 3.1.7, il existe une suite $\varphi_k$ de fonctions lisses qui décroît vers $\varphi$ partout, et telle que $T_k := \Theta_h(L) + dd^c\varphi_k$ vérifie $T_k \geq -C\omega$ pour une constante $C > 0$ et $T_k(x) \to T_{ac}(x)$ presque partout. Soient $\lambda_1^{(k)} \leq ... \leq \lambda_n^{(k)}$ les valeurs propres de $T_k$, de sorte que $\lambda_i^{(k)}$ converge vers $\lambda_i$ presque partout. D'après la version lisse de l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano, on a

$$\int_X (\lambda_1^{(k)} + ... + \lambda_{n-p}^{(k)})|u|^2 e^{2\varphi_k} dV_\omega \leq 0$$

pour tout $k$. Comme la suite $\varphi_k$ est uniformément majorée, on voit que l'intégrande est uniformément minoré sur $X$, et converge presque partout vers $(\lambda_1 + ... + \lambda_{n-p})|u|^2 e^{2\varphi}$. On peut donc appliquer le lemme de Fatou, et le résultat suit.

On fixe maintenant $u \in H^0(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}_X(-L))$, et l'on écrit $T_\varepsilon = \Theta_h(L) + dd^c\varphi_\varepsilon$. Si l'on normalise $\varphi_\varepsilon$ de sorte que $\int_X \varphi_\varepsilon dV_\omega = 0$, alors la suite $\varphi_\varepsilon$ est uniformément majorée, et l'on peut supposer qu'elle converge presque partout vers une fonction $\varphi$ telle que $T := \Theta_h(L) + dd^c\varphi \geq 0$. Il suffit pour cela de prendre pour $T$ une valeur d'adhérence de $T_\varepsilon$, et d'utiliser des arguments de compacité standards (compacité de l'opérateur de Green). D'après le lemme, on a

$$\int_X (\lambda_1^\varepsilon + ... + \lambda_{n-l+1}^\varepsilon + ... + \lambda_{n-p}^\varepsilon)|u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} dV_\omega \leq 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Le but est de montrer que les $n-l+1$ premières valeurs propres de $T_{\varepsilon,ac}$ ne sont pas trop petites en dehors d'un ensemble de mesure petite à cause de cette inégalité, de façon à tirer de l'inégalité de BKN une estimation du type

$$\int_X |u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} dV_\omega = O(\varepsilon^\eta)$$

pour un $\eta > 0$ assez petit. On aura alors $\int_X |u|^2 e^{2\varphi} dV_\omega = 0$ à la limite (par convergence dominée), et donc $u = 0$, ce qui achèvera la démonstration.
On remarque que $\int_X (\lambda_n^\varepsilon + \varepsilon) dV_\omega \leq \int_X (T_{\varepsilon,ac} + \varepsilon\omega) \wedge \omega^{n-1}$ est uniformément majorée d'après le théorème 3.1.10. Il s'ensuit que, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $V_\varepsilon := \{\lambda_n^\varepsilon + \varepsilon \geq \varepsilon^{-\delta}\}$ est de mesure $O(\varepsilon^\delta)$.
Par ailleurs, l'inégalité ci-dessus implique que

$$(\lambda_{n-l+1}^\varepsilon + \varepsilon)^{n-l+1} (\lambda_n^\varepsilon + \varepsilon)^{l-1} \geq (\lambda_1^\varepsilon + \varepsilon\omega)...(\lambda_n + \varepsilon\omega) \geq C\varepsilon^{n-l}.$$

En dehors de $V_\varepsilon$, on a donc $\lambda_{n-l+1}^\varepsilon + \varepsilon \geq C\varepsilon^\mu$, avec

$$\mu := (n - l + \delta(l-1))/(n-l+1) > 0.$$

On fixe maintenant $\delta > 0$ assez petit pour que $\mu < 1$, de sorte qu'on obtient $\lambda_1^\varepsilon + ... + \lambda_{n-l+1}^\varepsilon + ... + \lambda_{n-p}^\varepsilon \geq \lambda_{n-l+1}^\varepsilon - (n-p)\varepsilon \geq C\varepsilon^\mu$ en dehors de $V_\varepsilon$ pour une autre constante $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. Sur $V_\varepsilon$, on a de toutes manières $\lambda_1^\varepsilon + ... + \lambda_{n-l+1}^\varepsilon + ... + \lambda_{n-p}^\varepsilon \geq -(n-p)\varepsilon$, et on a donc au total

$$\int_X (\lambda_1^\varepsilon + ... + \lambda_{n-l+1}^\varepsilon + ... + \lambda_{n-p}^\varepsilon)|u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} dV_\omega$$

$$\geq C\varepsilon^\mu \int_{X-V_\varepsilon} |u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} dV_\omega - (n-p)\varepsilon C_1 vol(V_\varepsilon)$$

avec $C_1$ un majorant uniforme de $|u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon}$. La première intégrale étant négative par BKN, on en déduit que

$$\int_{X-V_\varepsilon} |u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} dV_\omega = O(\varepsilon^{1-\mu+\delta})$$

en utilisant que $vol(V_\varepsilon) = O(\varepsilon^\delta)$. Comme on a aussi

$$\int_{V_\varepsilon} |u|^2 e^{2\varphi_\varepsilon} = O(\varepsilon^\delta),$$

on a bien obtenu une estimée de la norme $L^2$ de $u$ de la forme annoncée, qed.

## 3.3 Constantes de Seshadri

La multiplicité minimale d'une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ en un point $x \in X$ est l'obstruction à trouver des courants $T \in \alpha$ qui soient lisses près de $x$ et de partie négative arbitrairement petite.
Inversement, on peut s'intéresser aux courants $T \in \alpha$ avec une singularité isolée en $x$ la plus grande possible et une partie négative arbitrairement petite. Si $T \in \alpha$ est un courant presque positif avec $T \geq -\varepsilon\omega$ et $x$ est un point isolé de $\mathrm{Sing}(T)$, alors (par définition du lieu singulier) tout potentiel local $\varphi$ de $T$ sur un petit voisinage $U$ de $x$ est localement borné sur $U - \{x\}$. Quitte à rétrécir $U$, on peut s'arranger pour que $\varphi$ soit défini et borné près de $\partial U$ ; si l'on pose $\psi = \max(\varphi, -C)$ au voisinage de $U$, alors $\psi = \varphi$ près de $\partial U$ pour $C \gg 1$, et on peut donc recoller $\psi$ sur $U$ avec $\varphi$ sur $X - U$. On obtient ainsi un nouveau courant $T' \geq -\varepsilon\omega$ dans $\alpha$ qui n'a plus de singularité en $x$. On voit donc que $\nu(\alpha, x) = 0$ si un tel courant $T$ existe pour tout $\varepsilon > 0$. Inversement, si $x$ est un point nef de $\alpha$, i.e. si $\nu(\alpha, x) = 0$, on peut choisir un courant $T \geq -\varepsilon\omega$ à singularités analytiques tel que $\nu(T, x) = 0$. Si l'on ajoute à $T$ $dd^c\delta\theta(z)\log|z - x|$ avec $\theta$ une fonction de troncature près de $x$ et $\delta = O(\varepsilon)$, alors on obtient un nouveau courant de partie négative $-2\varepsilon\omega$ ayant une singularité isolée en $x$. On peut donc poser la

**Définition 3.3.1** *Si $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ est une classe pseudoeffective et $x \in X$ est un des ses points nefs, on définit la constante de Seshadri $\varepsilon(\alpha, x)$ de $\alpha$ en $x$ comme le supremum des $\gamma \geq 0$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ ayant une singularité isolée en $x$ et tel que $\nu(T, x) \geq \gamma$.*

Les constantes de Seshadri admettent une caractérisation plus algébrique :

**Théorème 3.3.2** *Soit $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective, et soit $x$ un de ses points nefs. Si $\pi : \tilde{X} \to X$ désigne l'éclatement de $X$ en $x$, de diviseur exceptionnel $E$, alors $\varepsilon(\alpha, x)$ est le plus grand réel $\gamma \geq 0$ tel que $\pi^\star\alpha - \gamma\{E\}$ soit nef le long de $E$ (i.e. $E$ ne rencontre pas son lieu non nef).*

**Démonstration** : on remarque tout d'abord que $\pi^\star\alpha$ elle-même est nef le long de $E$. En effet, l'hypothèse $\nu(\alpha, x) = 0$ implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ lisse près de $x$, et $\pi^\star T$ est alors lisse près de $E$, de partie négative arbitrairement petite, d'où le résultat. Soit maintenant $\delta > 0$. Le théorème 1.2.10 implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ à singularités analytiques ayant une singularité isolée en $x$ avec $|\nu(T,x) - \varepsilon(\alpha,x)| < \delta$. On a donc $\pi^\star T = S + \nu(T,x)[E]$, avec $S$ à singularités analytiques, lisse près de $E$ et $S \geq -\varepsilon\pi^\star\omega$. On en déduit facilement que $\pi^\star\alpha - \varepsilon(\alpha,x)\{E\}$ est nef. Réciproquement, on fixe une métrique hermitienne $\omega$ sur $X$. Par le lemme 1.2.12, il existe $\delta > 0$ et un représentant lisse $\theta$ de $-\delta\{E\}$ tels que $\mu^\star\omega+\theta$ soit définie positive. Si $\pi^\star\alpha - \gamma\{E\}$ est nef le long de $E$, et $\varepsilon > 0$ vérifie $\gamma \geq \varepsilon\delta$, alors $\pi^\star\alpha - (\gamma - \varepsilon\delta)\{E\}$ est aussi nef le long de $E$ puisque $\pi^\star\alpha$ l'est. Il existe donc un courant à singularités analytiques $R$ dans $\pi^\star\alpha - (\gamma - \varepsilon\delta)\{E\}$ qui soit lisse près de $E$ et tel que $R \geq -\varepsilon(\mu^\star\omega + \theta)$. Mais alors $S := R + \varepsilon\theta + \gamma[E]$ est un courant à singularités analytiques dans $\pi^\star\alpha$ tel que $S \geq -\varepsilon\mu^\star\omega$ et $\nu(S,E) = \gamma$. D'après la proposition 1.2.7, il existe donc un unique $T \in \alpha$ tel que $S = \mu^\star T$ et $T \geq -\varepsilon\omega$. $T$ a donc une singularité isolée en $x$, avec $\nu(T,x) = \nu(S,E) = \gamma$ par le corollaire 1.1.8. On en déduit que $\varepsilon(\alpha,x) \geq \gamma$, qed.

**Corollaire 3.3.3** *Si $L$ est un fibré nef sur une variété projective, alors $\alpha := c_1(L)$ vérifie $\varepsilon(\alpha,x) = \inf L \cdot C/\nu(C,x)$ pour tout $x \in X$, où $C$ décrit les courbes irréductibles passant par $x$.*

**Démonstration** : soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de $X$ en $x$. Si $D$ est une courbe irréductible de $\widetilde{X}$ contenue dans le diviseur exceptionnel $E$ de $\pi$, alors $(\pi^\star\alpha - \gamma\{E\}) \cdot D = -\gamma E \cdot D$ est positif, puisque $\mathcal{O}_E(-E)$ est ample. Si $D$ ne rencontre pas $E$, alors $(\pi^\star\alpha - \gamma\{E\}) \cdot D = \pi^\star\alpha \cdot D \geq 0$ également. D'après le critère de Nakai-Moishezon, on voit donc que $(\pi^\star\alpha - \gamma E)$ est nef ssi elle est positive contre toute courbe irréductible $D$ de $\widetilde{X}$ rencontrant $E$, mais pas contenue dedans. $D$ est une telle courbe ssi elle est la transformée stricte d'une courbe irréductible $C$ de $X$ passant par $x$ ; on a alors $D \cdot E = \nu(C,x)$, et $(\pi^\star\alpha - \gamma\{E\}) \cdot D = \alpha \cdot C - \gamma\nu(C,x)$, d'où le résultat.

Si $\alpha$ est une classe grosse, alors $\varepsilon(\alpha,x) > 0$ pour tout $x \in X$ qui n'est pas dans le lieu non kählerien de $\alpha$. En effet, pour un tel $x$, on peut trouver un courant kählerien à singularités analytiques $T \in \alpha$ tel que $\nu(T,x) = 0$. $T + dd^c\delta\theta(z)\log|z-x|$ est alors un courant positif dans $\alpha$ avec une singularité isolée en $x$ de nombre de Lelong $\delta$, et en particulier on voit que $\varepsilon(\alpha,x) > 0$. Réciproquement :

**Théorème 3.3.4** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte et $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ une classe pseudoeffective. Si $x$ est un point nef de $\alpha$, alors le volume de $\alpha$ vérifie $v(\alpha) \geq \varepsilon(\alpha,x)^n$. En particulier, $\alpha$ est grosse ssi $\varepsilon(\alpha,x) > 0$ en un de ses points nefs $x$.*

**Démonstration** : on fixe une forme kählerienne $\omega$ sur $X$. Soit $\gamma > 0$ proche de $\varepsilon(\alpha,x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un courant $T \in \alpha[-\varepsilon\omega]$ à singularités analytiques tel que $\nu(T,x) \geq \gamma$ et $x$ est isolé dans $\mathrm{Sing}(T)$. Soit $\mu : \widetilde{X} \to X$ une résolution des singularités de $T$ en dehors de $x$. La décomposition de Siu de $\mu^\star T$ s'écrit $R + [D]$, où $D$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif et $R \geq -\varepsilon\mu^\star\omega$ est lisse hors de $x$, avec une singularité analytique isolée en $x$ et $\nu(R,x) = \nu(T,x) \geq \gamma$. $R+\varepsilon\mu^\star\omega$ est alors un courant positif fermé à sigularités isolées, donc le théorème 1.1.1 montre que le courant produit $(R+\varepsilon\mu^\star\omega)^n$ est bien défini. D'après [Dem92], on a de plus $\int_{\widetilde{X}}(R+\varepsilon\mu^\star\omega)^n \geq \nu(R+\varepsilon\mu^\star\omega, x)^n$. Or $v(\alpha + \varepsilon\{\omega\}) = v(\mu^\star\alpha + \varepsilon\mu^\star\{\omega\}) \geq v(\{R\} + \varepsilon\mu^\star\{\omega\})$, et ce dernier est $\int_{\widetilde{X}}(R+\varepsilon\mu^\star\omega)^n$ puisque $\{R+\varepsilon\mu^\star\omega\}$ est nef (c'est la classe d'un courant positif fermé avec des singularités isolées). On a donc obtenu

$$v(\alpha + \varepsilon\{\omega\}) \geq \gamma^n.$$

Il reste à faire $\varepsilon \to 0$ puis $\gamma \to \varepsilon(\alpha, x)$ pour en déduire le résultat.

Plus généralement, on obtient de la même façon le résultat suivant ($X$ est aussi kählerienne) :

**Théorème 3.3.5** *Soit $\alpha_1, ..., \alpha_p \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ des classe pseudoeffectives, et soit $\Theta$ un courant positif fermé sur $X$ de bidimension $(p,p)$ qui ne charge pas leurs lieux non nefs. On a alors :*

$$(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \cdot \Theta)_{\geq 0} \geq \varepsilon(\alpha_1, x)...\varepsilon(\alpha_p, x)\nu(\Theta, x)$$

*si $x$ est un point nef de chacun des $\alpha_i$.*

**Remarque :** on peut reformuler le résultat principal de [Nak02] de la facon suivante : si $\alpha \in NS(X)_{\mathbf{R}}$ est une classe grosse (et $X$ projective), alors $\varepsilon(\alpha, x) = 0$ au point général $x$ du lieu non kählerien de $\alpha$. On s'attend bien sûr à ce que cette propriété soit vraie pour une classe $\alpha \in H^{1,1}_{BC}(X, \mathbf{R})$ quelconque.

# Chapitre 4

# Cônes d'une variété hyperkählerienne

## 4.1 Le cône kählerien d'une variété hyperkählerienne

### 4.1.1 Enoncés

Par variété hyperkählerienne, on entendra une variété compacte hyperkählerienne irréductible, i.e. une variété $X$ kählerienne compacte, simplement connexe et telle que l'espace des 2-formes holomorphes $H^0(X, \Omega_X^2)$ soit une droite complexe engendrée par une 2-forme $\sigma$ non-dégénérée en tout point. On note $2m$ la dimension de $X$ et on normalise $\sigma$ en sorte que $\int_X (\sigma\overline{\sigma})^n = 1$. En utilisant la décomposition de Hodge $H^2(X, \mathbf{C}) = (H^{2,0} \oplus H^{0,2}) \oplus H^{1,1}$, on munit $H^2(X, \mathbf{C})$ d'une forme quadratique $q_X$ (dite de Beauville-Bogomolov) définie comme suit : $q_X(\alpha) = \int_X (\sigma\overline{\sigma})^{n-1}\alpha^2$ pour $\alpha \in H^{1,1}$, $q_X(\lambda\sigma + \mu\overline{\sigma}) = \lambda\mu$, et $H^{1,1}$ est orthogonal à $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$. On note alors $\mathcal{P}_X$ le cône quadratique positif de $X$, i.e. la composante connexe du cône kählerien $\mathcal{K}_X$ dans $\{\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}), q_X(\alpha) > 0\}$. Dans un preprint récent [Huy01], D. Huybrechts montre le résultat suivant :

**Théorème 4.1.1** *Le cône nef $\overline{\mathcal{K}}_X$ de $X$ est composé exactement des éléments $\alpha$ de l'adhérence $\overline{\mathcal{P}}_X$ du cône quadratique positif qui vérifient $\int_C \alpha \geq 0$ si $C \subset X$ est une courbe rationnelle.*

Mettons ceci en relation avec le critère de Nakai-Moishezon récemment obtenu par J.-P. Demailly et M. Paun [DP01] : si $X$ est une variété kählerienne compacte, le cône nef (resp. le cône kählerien) de $X$ est une des composantes connexes du cône formé des classes $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ telles que $\int_Y \alpha^p$ est positif (resp. strictement positif) pour tout sous-ensemble analytique irréductible $Y \subset X$ de dimension $p$.

Dans le cas où $X$ est compacte hyperkählerienne, un résultat de A.Fujiki [Fuj87] (cf.aussi [Huy99]) montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\int_X \alpha^{2n} = cq_X(\alpha)^n$ pour toute classe $\alpha \in H^2(X, \mathbf{C})$. Ainsi le théorème 4.2.1 revient à dire qu'il suffit de tester la positivité pour $Y = X$ et $Y$ une courbe rationnelle dans le critère de Nakai-Moishezon dans le cas hyperkählerien.

Si $X$ est dépourvue de courbes rationnelles, il résulte immédiatement du théorème 4.2.1 que $\mathcal{P}_X = \mathcal{K}_X$, et nous nous proposons de montrer le résultat suivant :

**Théorème 4.1.2** *Le cône kählerien $\mathcal{K}_X$ d'une variété compacte hyperkählerienne $X$ est composé exactement des éléments $\alpha \in \mathcal{P}_X$ du cône positif qui vérifient $\int_C \alpha > 0$ si $C \subset X$ est une courbe rationnelle.*

Ceci répond à une question posée dans [Huy01].

### 4.1.2 Explications

Pour obtenir le théorème 4.2.1, Huybrechts montre en fait un résultat plus fort : si $\alpha \in \mathcal{P}_X$ est très générale et $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C \subset X$, alors $\alpha$ est une classe kählerienne, l'expression "très générale" signifiant comme d'habitude "en dehors d'une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques". Notre observation est la suivante : en décortiquant la démonstration du théorème 4.2.1, on s'aperçoit (*a posteriori*, i.e. en utilisant le Théorème 9.1 !) qu'une classe de $\mathcal{P}_X$ strictement positive sur les courbes rationnelles est déjà "très générale", et donc kählerienne.

Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques résultats concernant les déformations de $X$ (cf. [Huy99]). Rappelons d'abord que les obstructions à déformer $X$ s'annulent (car le fibré canonique $K_X$ est trivial), et comme de plus $h^0(X, T_X) = q(X) = 0$, $X$ admet une déformation universelle, dont la base est un germe de variété complexe de dimension $h^{1,1}$, noté $(\mathrm{Def}(X), 0)$. Toutes les petites déformations de $X$ sont encore hyperkähleriennes, et on obtient une application des périodes $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(X) \to \mathbf{P}H^2(X, \mathbf{C})$ en associant à $t \in \mathrm{Def}(X)$ la droite $H^{2,0}(X_t, \mathbf{C})$. Cette application est holomorphe, et arrive dans l'ouvert de la quadrique $Q := \{q_X = 0\}$ défini par $q_X(x + \overline{x}) > 0$. On montre que l'application $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(X) \to Q$ est étale (théorème de Torelli local).

Pour toute classe kählerienne $\alpha$ de $X$, il existe une déformation particulière de $X$, dite déformation twistorielle, obtenue comme suit : d'après le théorème de Calabi-Yau, il existe dans $\alpha$ une unique métrique kählerienne Ricci-plate $\omega$, dont l'holonomie va être précisément $Sp(n)$ car $X$ est hyperkählerienne irréductible. Les quaternions $\mathbf{H}$ agissent alors comme endomorphismes parallèles de $T_X$, et chaque élément de la sphère unité de $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}I \oplus \mathbf{R}J \oplus \mathbf{R}K$ induit une structure complexe sur $X$. On montre que tout ceci s'organise en une déformation $\mathcal{X} \to \mathbf{P}^1$ de fibre centrale $X$, dont la classe de Kodaira-Spencer correspond à $\alpha$ sous l'isomorphisme naturel $H^1(X, T_X) \to H^{1,1}(X, \mathbf{C})$ induit par $\sigma$. Si l'on note $F(\alpha) = \mathbf{C}\sigma \oplus \mathbf{C}\overline{\sigma} \oplus \mathbf{C}\alpha \subset H^2(X, \mathbf{C})$, on montre que la droite $H^{2,0}(X_t)$ est contenue dans $F(\alpha)$ si $X_t$ est la fibre correspondant à $t \in \mathbf{P}^1$ dans la déformation. Ainsi, l'application des périodes restreinte à la déformation twistorielle $\mathcal{P} : \mathbf{P}^1 \to Q$ arrive en fait dans la quadrique $T(\alpha) := Q \cap \mathbf{P}F(\alpha)$ du plan projectif $\mathbf{P}F(\alpha)$, donc permet d'identifier la base $\mathbf{P}^1$ de la déformation twistorielle associée à $\alpha$ avec $T(\alpha)$.

On peut du coup généraliser la déformation twistorielle à n'importe quelle classe $\alpha$ de type $(1,1)$ : on pose $T(\alpha) := \mathcal{P}^{-1}\mathbf{P}F(\alpha)$ avec $F(\alpha)$ défini comme ci-dessus, et on appelle déformation twistorielle associée à $\alpha$ la restriction de la famille universelle à $T(\alpha)$ (qui n'est toutefois qu'un germe de courbe dans ce cas plus général). Dans ce cas, on montre à nouveau que la classe de Kodaira-Spencer de la déformation twistorielle s'identifie à $\alpha$. Si $\alpha$ est de plus réelle, on montre que $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_t, \mathbf{R})$ est une droite réelle pour chaque $t \in T(\alpha)$, qui n'est autre que $\mathbf{R}\alpha$ pour $t = 0$.

Supposons maintenant que $\alpha \in \mathcal{P}_X$, et que l'on peut trouver $t_0 \in T(\alpha)$ proche de 0 avec $\mathcal{P}_{X_{t_0}} = \mathcal{K}_{X_{t_0}}$. Comme la droite $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_t, \mathbf{R})$ tend vers $\mathbf{R}\alpha$, on va pouvoir écrire $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_{t_0}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}\alpha_{t_0}$ avec $\alpha_{t_0}$ dans $\mathcal{P}_{X_{t_0}}$, donc dans $\mathcal{K}_{X_{t_0}}$. On a alors $F(\alpha) = F(\alpha_{t_0})$, et on obtient ainsi deux familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ au dessus de $T := T(\alpha)$, la première étant la déformation twistorielle de $\alpha$ et la seconde la restriction à $T(\alpha)$ de la déformation twistorielle de $\alpha_{t_0}$, dont les fibres respectives au-dessus de $t_0$ sont isomorphes. On considère un ouvert maximal $V \subset T$ tel que les déformations de $X_{t_0} = X'_{t_0}$,  savoir $\mathcal{X}_{|V}$ et $\mathcal{X}'_{|V}$, soient isomorphes. On dispose du lemme suivant, dont la preuve est identique à celle du Théorème 4.3 de [Huy99] :

**Lemme 4.1.3** *Soient $\mathcal{X} \to S$ et $\mathcal{X}' \to S$ deux familles de variétés hyperkähleriennes compactes au dessus d'une même base $S$, et soit $U \subset S$ un ouvert tel que $\mathcal{X}_{|U}$ et $\mathcal{X}'_{|U}$ soient isomorphes. Si $s_0 \in S$ est adhérent à $U$, il existe un cycle de dimension $2n$ $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j \subset X_{s_0} \times X'_{s_0}$ telle que*
*(i) $Z$ définit une application birationnelle $X_{s_0} \to X'_{s_0}$.*
*(ii) Les projections $Y_j \to X_{s_0}$ et $Y_j \to X'_{s_0}$ ne sont pas génériquement finies.*
*(iii) $\Gamma$ est une valeur d'adhérence des graphes des isomorphismes $X_t \to X'_t$ pour $t \in U$.*

On veut montrer que $\partial V$ est au plus dénombrable. La fibre très générale d'une (vraie) déformation twistorielle d'une classe kählerienne ne contient ni courbes ni diviseurs effectifs, donc il suffit de voir que pour $s \in \partial V$, $X'_s$ doit contenir une courbe ou un diviseur effectif. Si tel n'est pas le cas, on applique le lemme précédent avec $s_0 = s$ ; comme $X_s$ et $X'_s$ sont minimales et que $X'_s$ n'a pas de courbes, $Z$ définit en fait un isomorphisme entre $X_s$ et $X'_s$ ; comme $X'_s$ ne contient pas de diviseur effectif, les $(Y_j)_\star : H^2(X_s) \to H^2(X'_s)$ sont nuls, et un calcul de volume montre alors que les $Y_j$ eux-mêmes sont nuls. Il en résulte que $Z = \Gamma$ induit un isomorphisme $X_s \to X'_s$ qui prolonge $\mathcal{X}_{|V} \to \mathcal{X}'_{|V}$, ce qui contredit la maximalité de $V$. Ainsi $\partial V$ est bien au plus dénombrable ; il ne saurait donc séparer les deux ouverts $V$ et $T - \overline{V}$ si ce dernier était non-vide, d'où : $\overline{V} = T$.

En particulier, on obtient que $0 \in T(\alpha)$ est adhérent à $V$, et on peut à nouveau appliquer le lemme. On voit alors que $(\Gamma)_\star(\alpha) \in H^2(X'_0, \mathbf{R})$ engendre la droite réelle $F(\alpha_{t_0}) \cap H^{1,1}(X'_0, \mathbf{R})$, qui est nécessairement engendrée par une classe kählerienne puisque $X'_0$ est une des fibres de la déformation twistorielle de $X'_{t_0}$ associée à $\alpha_{t_0}$. On obtient au total la

**Proposition 4.1.4** *Si $X$ est hyperkählerienne compacte et $\alpha \in \mathcal{P}_X$ vérifie :*
*$(\star)$ il existe $t$ proche de $0$ dans $T(\alpha)$ tel que $\mathcal{P}_{X_t} = \mathcal{K}_{X_t}$*
*alors il existe $X'$ hyperkählerienne compacte et un cycle de dimension $2n$ $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j \in X \times X'$ tels que :*
*(i) $Z$ induit une application birationnelle $X - \to X'$.*
*(ii) Les projections $Y_j \to X$ et $Y_j \to X'$ ne sont pas génériquement finies.*
*(ii) $(\Gamma)_\star(\alpha) \in H^2(X', \mathbf{R})$ est une classe kählerienne.*

Ceci correspond au Corollaire 2.4 de [Huy01], avec l'hypothèse $(\star)$ en place de "$\alpha$ très générale". Admettons un moment le

**Lemme 4.1.5** *Soit $X$ est hyperkählerienne compacte et $\alpha \in \mathcal{P}_X$ telle que $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C$. Alors $(\star)$ est vérifiée.*

On peut alors achever la démonstration du théorème 4.1.2 : considérons $\alpha \in \mathcal{P}_X$ avec $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C \subset X$. On obtient alors $X'$ et $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j$ comme dans la proposition. Le fait que $\int_C \alpha > 0$ pour toute $C$ rationnelle et que $\Gamma_\star(\alpha)$ est kählerienne impliquent que l'image de chaque $Y_j \to X'$ est de codimension au moins deux (preuve du Théorème 2.5 de [Huy01]), et donc que $(Y_j)_\star : H^2(X) \to H^2(X')$ est nul. Ainsi $Z_\star(\alpha) = \Gamma_\star(\alpha)$ est une classe kählerienne, ce qui signifie que l'application birationnelle $f : X - \to X'$ induite par $Z$ envoie la classe $\alpha$, qui est strictement positive sur les courbes rationnelles, sur une classe kählerienne, et la Proposition 2.1 de [Huy01] permet de conclure que $f$ est en fait un isomorphisme, et donc que $\alpha$ est une classe kählerienne.

Venons en au lemme 4.1.5 : on a déjà vu que la classe de Kodaira-Spencer $\kappa$ de la déformation twistorielle de $X$ associée à $\alpha$ correspond à $\alpha$ sous l'isomorphisme $H^1(X, T_X) \to H^{1,1}(X)$ induit par la contraction avec

$\sigma \in H^{2,0}(X)$. La classe d'une courbe $[C] \in H^{2n-1,2n-1}(X)$ reste de type $(2n-1, 2n-1)$ dans la déformation twistorielle si et seulement si son cup produit avec $\kappa$ est nul, ce qui se réécrit $\int_C \alpha \neq 0$ d'après ce qui précède ; ainsi l'hypothèse sur $\alpha$ signifie que la classe $[C] \in H^{2n-1,2n-1}(X)$ de toute combinaison effective de courbes rationnelles change de type au cours de la déformation twistorielle associée à $\alpha$. Maintenant, si la fibre très générale de cette déformation devait contenir une courbe rationnelle, celle-ci se déformerait en une famille de combinaisons effectives de telles courbes, ce qui donnerait sur la fibre centrale une combinaison effective de courbes rationnelles dont le type reste constant au cours de la déformation, ce qui est absurde. Ainsi, la fibre très générale $X_t$ de la déformation twistorielle associée à $\alpha$ ne contient pas de courbes rationnelles, ce qui implique $\mathcal{P}_{X_t} = \mathcal{K}_{X_t}$ d'après le théorème 4.2.1, qed.

## 4.2 Décomposition de Zariski

### 4.2.1 Notations

On désignera par $X$ une surface kählerienne compacte, ou une variété hyperkählerienne. On dispose alors d'une forme quadratique $q$ sur $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, définie comme suit : si $X$ est une surface, on pose $q(\alpha) := \int \alpha^2$ pour $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Si $X$ est hyperkählerienne, on dispose d'une forme symplectique $\sigma \in H^0(X, \Omega_X^2)$, et l'on pose : $q(\alpha) := \int \alpha^2 (\sigma\overline{\sigma})^{m-1}$. $q$ est juste la restriction à $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ de la forme quadratique de Beauville-Bogomolov, et l'on peut normaliser $\sigma$ de façon que $q(\alpha)^m = \int \alpha^{2m}$ pour toute $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ (avec $\dim X = n = 2m$).
Dans les deux cas, $(H^{1,1}(X, \mathbf{R}), q)$ est lorentzien, i.e. non-dégénéré de signature $(1, h^{1,1}(X) - 1)$. Le cône ouvert $\{\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}), q(\alpha) > 0\}$ a donc deux composantes connexes, chacune un cône convexe, et l'on appelle cône positif (attaché à $q$) la composante $\mathcal{P}$ qui contient le cône kählerien $\mathcal{K}$.
Pour terminer, on désignera en général par $\lambda^\perp$, $\lambda_{>0}$ et $\lambda_{<0}$ l'hyperplan et les deux demi-espaces associés à une forme linéaire $\lambda$. Le dual $\mathcal{C}^\star$ d'un cône convexe $\mathcal{C} \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est vu comme un cous-cône de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ via la dualité induite par $q$.

### 4.2.2 Le dual du cône pseudoeffectif

Nous allons prouver que le cône nef en codimension 1 est le dual du cône pseudoeffectif, dans chacun des deux cas.

### Le cas d'une surface

On suppose que $X$ est une surface (kählerienne compacte). Le résultat suivant est essentiellement bien connu :

**Théorème 4.2.1** *Si $X$ est une surface, le cône nef coincide avec le cône nef en codimension 1. C'est aussi le dual du cône pseudoeffectif.*

**Démonstration** : si $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est nef en codimension 1, son lieu non nef est une réunion dénombrable de points. La restriction de $\alpha$ à chacun de ces points est nef (par convention), et $\alpha$ est donc nef par le corollaire 2.1.7. Puisque $\int_X \omega \wedge T$ est positif si $\omega$ est une forme kählerienne et $T$ est un $(1,1)$-courant positif fermé, on a tout de suite $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}^\star$, et donc aussi $\mathcal{N} = \overline{K} \subset \mathcal{E}^\star$. L'autre inclusion est plus profonde, puisqu'elle découle du critère de Nakai-Moishezon pour les classes kähleriennes, démontré dans [Lam99] (et aussi [DP01]). En effet, d'après ce critère, une classe $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est nef ssi $\alpha \cdot \omega \geq 0$ pour toute classe kählerienne $\omega$ et $\alpha \cdot C \geq 0$ pour toute courbe irréductible $C \subset X$.

**Corollaire 4.2.2** *Le cône positif $\mathcal{P}$ d'une surface est contenu dans le cône gros.*

Autrement dit : si $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ vérifie $\alpha^2 > 0$, alors $\alpha$ ou $-\alpha$ est grosse (c'est bien connu pour $\alpha = c_1(L)$, avec $L$ un fibré en droites). Pour le voir, on note que $\overline{\mathcal{P}}$ est son propre dual (car $q$ est lorentzienne) ; comme $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ par construction, on a donc $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{K}^\star$. Or $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{E}^\star$ d'après le théorème, donc $\mathcal{K}^\star = \mathcal{E}$. Le résultat suit.

### Le cas hyperkählerien

Dans ce cas, le cône nef en codimension 1 est aussi le dual du cône pseudoeffectif. La preuve utilise une autre description, due à D.Huybrechts, du dual du cône pseudoeffectif comme cône kählerien birationnel. Dans la direction facile, on a la

**Proposition 4.2.3** *(i) Le cône nef en codimension 1 $\mathcal{N}^1$ est contenu à la fois dans le dual du cône pseudoeffectif $\mathcal{E}^\star$ et dans l'adhérence $\overline{\mathcal{P}}$ du cône positif.*
*(ii) On a $q(D, D') \geq 0$ dès que $D \neq D'$ sont deux diviseurs irréductibles.*

**Démonstration** : pour montrer (i), il suffit de voir que $\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{E}^\star$. En effet, $\mathcal{K}^1 \cap \mathcal{E}^\star \subset \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\star$ est trivialement contenu dans $\overline{\mathcal{P}}$. On choisit donc une classe $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ kählerienne en codimension 1, que l'on représente par un courant kählerien $T$ à singularités analytiques en codimension au

moins 2. Si $\beta \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est une classe pseudoeffective représentée par un courant positif $S$, le produit $T \wedge S$ est bien défini d'après le théorème 1.1.1. C'est un $(2,2)$-courant fortement positif fermé qui représente la classe produit $\alpha \wedge \beta$. La forme de bidimension $(2,2)$ $(\sigma\overline{\sigma})^{m-1}$ peut aussi s'écrire $i^{2m-2^2}(\sigma)^{m-1} \wedge \overline{\sigma^{m-1}}$, donc est (faiblement) positive. Ceci suffit pour assurer que $\int_X T \wedge S \wedge (\sigma\overline{\sigma})^{m-1}$ est positive. Comme $(\sigma\overline{\sigma})^{m-1}$ est fermée, on a bien $\int_X T \wedge S \wedge (\sigma\overline{\sigma})^{m-1} = q(\alpha, \beta)$. On a donc montré que $\alpha$ est positive contre toute forme pseudoeffective $\beta$, qed.
La démonstration du point (ii) est identique, en utilisant que le courant prooduit $[D] \wedge [D']$ est bien défini par le théorème 1.1.1.

La démonstration de l'autre inclusion $\mathcal{E}^\star \subset \mathcal{N}^1$ est beaucoup plus profonde. On appelera courbe rationnelle tout 1-cycle effectif donc les composantes sont des courbes rationnelles irréductibles. Les courbes rationnelles $C$ définissent une famille d'hyperplans $C^\perp$ dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, et donc des chambres dans $\mathcal{P}$, les composantes connexes de $\mathcal{P} - \cup C^\perp$, qu'on appelera chambres rationnelles. De même, les diviseurs irréductibles uniréglés $D$ définissent des hyperplans $D^\perp$ dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, et donc des chambres de $\mathcal{P}^\perp$, qu'on appelera chambres uniréglées. Parmi les chambres rationnelles (resp. uniréglées), la chambre fondamentale est la trace sur $\mathcal{P}$ de l'intersection de tous les demi-espaces $C_{>0}$ (resp. $D_{>0}$). On peut alors énoncer les résultats fondamentaux suivants, dûs à D.Huybrechts [Huy99] :

**Théorème 4.2.4** *(i) Le cône positif $\mathcal{P}$ est contenu dans le cône pseudoeffectif $\mathcal{E}$.*
*(ii) Si $\alpha \in \mathcal{P}$ appartient à l'une des chambres rationnelles, alors il existe une application biméromorphe $f : X - \to X'$ vers une variété hyperkählerienne $X'$ telle que*

$$f_\star \alpha = \omega' + \{D'\},$$

*où $\omega' \in H^{1,1}(X', \mathbf{R})$ est une classe kählerienne, et $D'$ est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif dont les composantes sont uniréglées.*
*(iii) Si $\alpha \in \mathcal{P}$ appartient à l'intersection de la chambre uniréglée fondamentale avec une des chambres rationnelles, alors on peut s'arranger pour que $D' = 0$ dans (ii).*
*(iv) La chambre rationnelle fondamentale coincide avec le cône kählerien de $X$.*

L'énoncé (iv) est une reformulation du théorème 4.1.2.
Dans la situation de (iii), $\alpha$ appartient à $f^\star \mathcal{K}_{X'} =: \mathcal{K}_f$ pour une application biméromorphe $f : X - \to X'$ vers une variété hyperkählerienne $X'$. La réunion des cônes convexes ouverts $\mathcal{K}_f := f^\star \mathcal{K}_{X'}$ pour $f$ décrivant toutes ces applications est appelé le cône kählerien birationnel (ou biméromorphe),

et est notée $\mathcal{BK}$. La réunion en question est en fait disjointe. En effet, une variété hyperkählerienne est minimale (i.e. a un fibré canonique nef), donc toute application biméromorphe entre des variétés hyperkählerienne est un isomorphisme entre deux ouverts de Zariski dont les complémentaires respectifs sont de codimension au moins deux. Un résultat d'A.Fujiki affirme que si $f$ est une telle application biméromorphe, et s'il existe une classe kählerienne $\alpha$ au but telle que $f^{\star}\alpha$ soit kählerienne, alors $f$ est un isomorphisme. On voit donc que si $\mathcal{K}_f$ et $\mathcal{K}_{f'}$ se rencontrent, $f' \circ f^{-1}$ est un isomorphisme, et donc $\mathcal{K}_f = \mathcal{K}_{f'}$.
Le cône kählerien birationnel $\mathcal{BK}$ est donc un cône ouvert, mais n'est certainement pas convexe en général. On peut reformuler le point (ii) ainsi :

**Proposition 4.2.5** *Le cône $\mathcal{BK}$ coincide avec la chambre uniréglée fondamentale privée de $\cup C^{\perp}$, pour $C$ décrivant les courbes rationnelles.*

En particulier, l'ensemble des classes des courbes rationnelles dans $H_{1,1}(X, \mathbf{R})$ est un invariant birationnel, puisque $\mathcal{BK}$, $\mathcal{P}$ et l'ensemble des diviseurs irréductibles uniréglés le sont.
On peut décrire le dual du cône pseudoeffectif :

**Proposition 4.2.6** *Le dual $\mathcal{E}^{\star}$ du cône pseudoeffectif d'une variété hyperkählerienne $X$ coincide avec :*
*(i) l'adhérence de $\mathcal{BK}$,*
*(ii) l'adhérence de la chambre uniréglée fondamentale.*
*(iii) le cône nef en codimension 1.*

**Démonstration** : d'après la proposition 4.2.5, (i) et (ii) sont identiques. De plus, le cône pseudoeffectif est un invariant biméromorphe, donc on a $\mathcal{BK} \subset \mathcal{E}^{\star}$, et $\mathcal{E}^{\star} \subset \overline{\mathcal{BK}}$ par la proposition 4.2.5. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{BK}$ est contenu dans le cône nef en codimension 1. Mais si $f : X - \to X'$ est une application biméromorphe, $f$ est un isomorphisme en codimension 1 puisque $X$ et $X'$ sont minimales, donc $f$ préserve le cône nef en codimension 1. Le résultat suit.

**Corollaire 4.2.7** *Une classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est nef en codimension 1 ssi $q(\alpha, D) \geq 0$ pour tout diviseur irréductible exceptionnel $D$.*

**Démonstration** : la condition est nécessaire d'après (i) de la proposition 4.2.3. Réciproquement, soit $\alpha$ pseudoefffective et positive contre les diviseurs exceptionnels. Si $\beta$ est une classe pseudoeffective, on a $q(\alpha, \beta) = q(\alpha, Z(\beta)) + \sum \nu(\beta, D) q(\alpha, D)$. La premier terme est positif car $Z(\beta)$ appartient à $\mathcal{N}^1 = \mathcal{E}^{\star}$, et le second est positif par hypothèse. On en déduite que $\alpha$ appartient à $\mathcal{E}^{\star} = \mathcal{N}^1$, qed.

### 4.2.3 Diviseurs exceptionnels

Si $X$ est une surface ou une variété hyperkählerienne, on peut attacher à toute famille $D_1, ..., D_r$ de diviseurs sa matrice de Gram $((q(D_i, D_j)))_{1 \leq i,j \leq r}$. On a alors la caractérisation suivante :

**Théorème 4.2.8** *Une famille $D_1, ..., D_r$ de diviseurs irréductibles est exceptionnelle ssi sa matrice de Gram $(q(D_i, D_j))$ est définie négative.*

**Démonstration** : soit $V$ (resp. $V_+$) le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des $\mathbf{R}$-diviseurs (resp. effectifs) portés par les $D_i$. On commence par un lemme d'algèbre quadratique :

**Lemme 4.2.9** *supposons que $(V, q)$ soit définie négative. Alors tout $E \in V$ tel que $q(E, D_j) \leq 0$ pour tout $j$ appartient à $V_+$.*

**Démonstration** : on écrit $E = E_+ - E_-$ avec $E_+$ et $E_-$ effectifs sans composante commune. Il s'agit de voir que $E_- = 0$, et ceci est équivalent à $q(E_-) \geq 0$. Mais $q(E_-) = q(E_-, E_+) - q(E_-, E)$. La premier terme est positif d'après (iii) de la proposition 4.2.3, puisque $E_+$ et $E_-$ n'ont pas de composante commune, et le second est positif par hypothèse sur $E$. Qed.
Soient maintenant $D_1, ..., D_r$ avec une matrice de Gram définie négative. En particulier, $\{V_+\} \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ ne rencontre $\overline{\mathcal{P}}$ qu'en 0. only. Puisque le cône nef en codimension 1 $\mathcal{N}^1$ est contenu dans $\overline{\mathcal{P}}$ par la proposition 4.2.3, $\{V_+\}$ ne rencontre $a\ fortiori$ $\mathcal{N}^1$ qu'en 0. Ceci signifie par définition que $D_1, ..., D_r$ est une famille exceptionnelle.
Réciproquement, supposons que $D_1, ..., D_r$ soit une famille exceptionnelle. On montre d'abord que la matrice $(q(D_i, D_j))$ est semi-négative. Sinon, on peut trouver un $\mathbf{R}$-diviseur $E$ dans $V$ tel que $q(E) > 0$. On écrit $E = E_+ - E_-$ comme ci-dessus, et l'on trouve $q(E_+) + q(E_-) = q(E) + 2q(E_+, E_-) > 0$, de sorte que l'on peut supposer que $E$ appartient à $V_+$. Comme $q(E) > 0$, $E$ est gros d'après le corollaire 4.2.2 (dont la preuve montre qu'il est aussi vrai dans le cas hyperkählerien). Comme on l'a vu au paragraphe 2.1.6, sa projection de Zariski $Z(\{E\})$ est alors un élément de $\{V_+\}$ qui est nef en codimension 1, et gros donc non nul en particulier. Contradiction.
Pour achever la preuve du théorème 4.2.8, on peut supposer (par récurrence) que la matrice de Gram de $D_1, ..., D_{r-1}$ est définie négative. Si (par l'absurde) $(V, q)$ est dégénéré, le sous-espace $V'$ de $V$ engendré par $D_1, ..., D_{r-1}$ est tel que son orthogonal $V'^{\perp}$ dans $V$ est égal au noyau de $(V, q)$. On décompose alors $D_r = E + F$ selon la somme directe $V = V' \oplus V'^{\perp}$. Puisque $q(E, D_j) = q(D_r, D_j) \geq 0$ pour $j < r$, le lemme 4.2.9 implique que $E \leq 0$. Par conséquent, $F = D_r - E$ appartient à $V_+$, et est certainement non nul. De plus, $F$ est un diviseur effectif orthogonal à toutes ses composantes, donc positif contre tout diviseur irréductible (grâce à (iii) de la proposition 4.2.3).

Ainsi, la classe $\{F\}$ est nef en codimension 1 d'après le corollaire 4.2.7, contradiction.

Le théorème dit en particulier qu'un diviseur irréductible $D$ est exceptionnel ssi $q(D) < 0$. Si $X$ est une surface $K3$, ceci implique que $D$ est de genre virtuel $\leq 0$, et donc est une courbe rationnelle lisse de carré $-2$. Sur une variété hyperkählerienne $X$ quelconque, nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 4.2.10** *Si $X$ est une variété hyperkählerienne, les diviseurs irréductibles exceptionnels sont uniréglés.*

**Démonstration** : puisque $D$ est exceptionnel, sa classe n'appartient pas à $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^\star$, et on peut donc trouver une classe $\alpha \in \mathcal{P}$ dans une des chambres rationnelles telle que $q(\alpha, D) < 0$. Le point (ii) du théorème 4.2.4 dit qu'il existe une application méormorphe $f : X - \to X'$ vers une variété hyperkählerienne telle que $f_\star\alpha = \omega' + \sum a_j D'_j$, avec $\omega'$ une classe kählerienne, $a_j \geq 0$ et $D'_j$ un diviseur irréductible uniréglé. Puisque la forme quadratique $q$ est préservée par $f$, on a $0 > q(\alpha, D) = q(\omega', f_\star D) + \sum a_j q(D'_j, f_\star D)$, et $q(D'_j, f_\star D)$ est donc strictement négatif pour un des $j$. Ceci implique que les deux diviseurs irréductibles $D'_j$ et $f_\star D$ coincident d'après (iii) de la proposition 4.2.3, et donc que $D = f^\star D'_j$ est uniréglé, puisque $D_j$ l'est.

### 4.2.4 Rationalité de la décomposition de Zariski divisorielle.

Nous allons démontrer que la décomposition de Zariski divisorielle est rationnelle (quand $X$ est une surface ou une variété hyperkählerienne) au sens où la partie négative $N(\alpha)$ d'une classe rationnelle $\alpha \in Ns(X)_{\mathbf{Q}}$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur. Ceci va résulter de la caractérisation suivante de la décomposition de Zariski divisorielle :

**Théorème 4.2.11** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoeffective.*
*Sa décomposition de Zariski divisorielle $\alpha = Z(\alpha) + \{N(\alpha)\}$ est l'unique décomposition orthogonale de $\alpha$ en la somme d'une classe nef en codimension 1 et de la classe d'un $\mathbf{R}$-diviseur effectif exceptionnel.*

**Démonstration** : on montre d'abord l'unicité d'une telle décomposition : supposons que $\alpha = p + \{N\}$, avec $p$ nef en codimension 1 et $N$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif exceptionnel orthogonal à $p$. Je dis qu'alors $N = N(\alpha)$. Pour ce voir, notons $D_1, ..., D_r$ les composantes de $N$. La matrice de Gram $(q(D_i, D_j))$ est définie négative, et $p$ est orthogonal à chacun des $D_i$ puisque $q(p, N) = 0$ et que $q(p, D_i) \geq 0$ pour tout $i$ (vu que $p$ est nef en codimension 1). L'égalité $\alpha = p + \{N\}$ implique que $N(\alpha) \leq N(p) + N$ (proposition 2.1.13), donc $N - N(\alpha)$ est un diviseur effectif puisque $N(p) = 0$, porté par les $D_i$. Mais

on a aussi $q(N(\alpha) - N, D_i) = q(p, D_j) - q(Z(\alpha), D_j) \leq 0$ car $q(p, D_i) = 0$, donc $N(\alpha) - N$ est un diviseur effectif d'après le lemme 4.2.9. On a donc bien $N(\alpha) = N$, et l'unicité désirée.
Afin de démontrer le théorème 4.2.11, nous allons montrer l'existence d'une telle décomposition $\alpha = p + \{N\}$ ; d'après ce qui précède, cette décomposition sera alors nécessairement la décomposition de Zariski divisorielle.

**Lemme 4.2.12** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ une classe pseudoefective, et soient $D_1, ..., D_r$ et $E_1, ..., E_p$ deux familles de diviseurs irréductibles telles que :*
*(i) $q(\alpha, D_j) < 0$ et $q(\alpha, E_i) \leq 0$ pour tous $i, j$.*
*(ii) $E_1, ..., E_r$ est une famille exceptionnelle.*
*Alors l'union de ces deux familles est exceptionnelle.*

**Démonstration** : soit $F$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif porté par les $D_j$ et les $E_i$, et supposons que $F$ soit nef en codimension 1. Il nous faut voir que $F = 0$. Comme $F$ est nef en codimension 1, on a $q(\alpha, F) \geq 0$, et il résulte de (i) que $F$ est porté par les $E_i$. Comme la famille des $E_i$ est exceptionnelle, on a bien $F = 0$.

A ce point, l'argument suit [Fuj79]. Si notre classe $\alpha$ est déjà dans $\mathcal{E}^\star$, on a terminé. Sinon, soit $A$ la famille des diviseurs irréductibles $D$ tels que $q(\alpha, D) < 0$. Cette famille est exceptionnelle d'après le lemme précédent, donc $A$ est finie, de matrice de Gram définie négative. Soit $V \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par $A$, et notons

$$\alpha = \alpha_1 + \{N_1\}$$

la décomposition de $\alpha$ dans la somme directe $V^\perp \oplus V$. J'affirme que $N_1$ est effectif et que $\alpha_1$ est pseudoeffective. Le premier point résulte du lemme 4.2.9, puisque $q(N_1, D) = q(\alpha, D) < 0$ pour tout $D \in A$. Ecrivons maintenant $N(\alpha) = E + F$ avec $E$ et $F$ effectifs sans composante commune et $F$ porté par la famille $A$. On a alors, pour tout $D \in A$, $q(F - N_1, D) \leq q(N(\alpha) - N_1, D)$ puisque $E$ et $D$ n'ont $a\ fortiori$ pas de composante commune, et
$q(N(\alpha) - N_1, D) = q(\alpha_1, D) - q(Z(\alpha), D) \leq 0$ puisque $q(\alpha_1, D) = 0$. D'après le lemme 4.2.9, $N(\alpha) - N_1$ est donc effectif, et $\alpha_1 = Z(\alpha) + \{N(\alpha) - N_1\}$ est bien une classe pseudoeffective.
Si $\alpha_1$ appartient à $\mathcal{E}^\star$, on a terminé. Sinon, on itère la construction : soit $B$ la famille des diviseurs irréductibles $D$ tels que $q(\alpha_1, D) < 0$. Puisque $A$ est une famille exceptionnelle avec $q(\alpha_1, D) = 0$ pour tout $D \in A$, le lemme 4.2.12 montre que la réunion $A_1$ de $A$ et de $B$ est aussi une famille exceptionnelle. On note $V_1 \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel enegendré par $A_1$, et l'on décompose

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \{N_2\}$$

dans la somme directe $V_1^\perp \oplus V_1$. Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que $N_1$ est effectif et que $\alpha_2$ est pseudoeffective. Mais la famille exceptionnelle $A_1$ est strictement plus grande que $A$, donc l'itération de ce processus doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes puisque la longueur des familles exceptionnelles est bornée par le nombre de Picard. Au bout de $l$ étapes, $\alpha_l$ est nef en codimension 1, et la décomposition voulue s'obtient en posant $p := \alpha_l$ et $N := N_1 + ... + N_l$, qui est bien exceptionnel puisque porté par $A \cup A_1 \cup ... \cup A_l = A_l$ (on a $A \subset A_1 \subset ... \subset A_l$ par construction). Qed.

**Corollaire 4.2.13** *La décomposition de Zariski divisorielle est rationnelle lorsque $X$ est une surface ou une variété hyperkählerienne. En particulier, si $L$ est un fibré en droites pseudoeffectif, $P := L - N(c_1(L))$ est un $\mathbf{Q}$-fibré en droites nef en codimension 1 tel que $H^0(X, \mathcal{O}(kP)) = H^0(X, \mathcal{O}(kD))$ pour tout $k > 0$ tel que $kP$ est Cartier.*

**Démonstration** : si $\alpha \in NS(X) \otimes \mathbf{Q}$ est une classe rationnelle, $N(\alpha)$ est nécessairement l'image de $\alpha$ par la projection orthogonale $NS(X) \otimes \mathbf{Q} \to V_{\mathbf{Q}}(\alpha)$, où $V_{\mathbf{Q}}(\alpha) \subset NS(X)_{\mathbf{Q}}$ est le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les composantes de $N(\alpha)$. Le second point résulte du théorème 2.2.10.

**Proposition 4.2.14 (Rationalité du volume)** *Si $p \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est une classe nef en codimension 1, son volume est*

$$v(p) = q(p)^m = \int p^{\dim X}.$$

*En général, on a $v(\alpha) = \int Z(\alpha)^{\dim X}$ ; en particulier, le volume d'une classe rationnelle est rationnel.*

**Démonstration** : seule la première assertion reste à voir. Si $X$ est une surface, cela résulte de la proposition 3.1.27. Si $X$ est hyperkählerienne, il suffit par continuité de le montrer pour une classe $p$ se trouvant dans $\mathcal{BK}$, donc on peut supposer qu'il existe une application biméromorphe $f : X - \to X'$ telle que $f_\star p$ soit une classe kählerienne. La forme $q$ est invariante par $f$, et le volume l'est également car $f$ est un isomorphisme en codimension 1. Le résultat est donc vrai pour $p$ puisqu'il l'est pour la classe kählerienne $f_\star p$.

En utilisant le théorème 4.2.11, nous allons montrer que les multiplicités minimales le long des diviseurs sont toujours continues sur $\mathcal{E}$ tout entier.

**Proposition 4.2.15** *Pour tout diviseur irréductible $D\subset X$, $\alpha \mapsto \nu(\alpha, D)$ est continue sur $\mathcal{E}$ tout entier.*

**Démonstration** : soit $\alpha_k$ une suite classe pseudoeffective convergeant vers $\alpha$. Comme $\alpha = Z(\alpha_k) + \{\sum_D \nu(\alpha_k, D)D\}$ est bornée, $Z(\alpha_k)$ et chaque $\nu(\alpha_k, D)$

le sont aussi ; après extraction diagonale, on peut donc supposer que $Z(\alpha_k)$ converge vers $p \in \mathcal{N}^1$ et que $\nu(\alpha_k, D) \to \nu_D$ pour tout $D$. Soit $A$ la famille des diviseurs irréductibles $D$ tels que $\nu(\alpha_k, D) > 0$ pour presque tout $k$. Si $D_1, ..., D_p$ appartiennent à $A$, ils vont être contenus dans le lieu non nef de $\alpha_k$ pour $k$ assez grand, et donc $D_1, ..., D_p$ est une famille exceptionnelle. On voit ainsi que $A$ elle-même est exceptionnelle, donc finie en particulier. Soit $\gamma_k := \{\sum_{D \notin A} \nu(\alpha_k, D)D\}$, de sorte que

$$\alpha_k = Z(\alpha_k) + \{\sum_{D \in A} \nu(\alpha_k, D)D\} + \gamma_k.$$

Chaque $\nu(\alpha_k, D)$ converge ; puisque $A$ est finie, $\sum \nu(\alpha_k, D)D$ converge aussi, et donc $\gamma_k$ converge vers un certain $\gamma$.
Je dis que $\gamma$ est nef en codimension 1. D'après le corollaire 4.2.7, il suffit de voir que $q(\gamma, D) \geq 0$ pour tout diviseur irréductible $D$. Si $D$ apparaît dans le support de $\gamma_k$ pour presque tout $k$, alors $\nu(\alpha_k, D) > 0$ pour presque tout $k$, i.e. $D$ appartient à $A$, ce qui est absurde par construction. On en déduit que $D$ n'apparaît pas dans le support de $\gamma_k$ pour une infinité de $k$, et donc que $q(\gamma_k, D) \geq 0$ pour une infinité de $k$. A la limite, on a donc bien $q(\gamma, D) \geq 0$.
Par ailleurs, pour tout $k$, la famille des diviseurs qui apparaissent dans $N(\alpha)$ est exceptionnelle, donc sa matrice de Gram est définie négative. En particulier, on a donc $q(\gamma_k, D)^2 \leq q(\gamma_k)q(D)$ par Cauchy-Schwartz, pour tout $D \in A$ et presque tout $k$. Comme $q(\gamma_k) \leq 0$ pour tout $k$, il vient $q(\gamma) \leq 0$ à la limite, et donc $q(\gamma) = 0$ puisque $\gamma$ est nef en codimension 1. Au total, on a donc $q(\gamma, D) = 0$ en passant à la limite dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $D \in A$. On a ainsi écrit $\alpha = (p + \gamma) + \{\sum_{D \in A} \nu_D D\}$, avec $p + \gamma$ nef en codimension 1, $A$ une famille exceptionnelle, et $p$ et $\gamma$ orthogonaux à $D$ pour tout $D \in A$. La décomposition en question est donc la décomposition de Zariski divisorielle de $\alpha$ d'après le théorème 4.2.11. En particulier, on a $\nu(\alpha, D) = \nu_D$ pour tout $D$, ce qui signifie que $\nu(\alpha, D)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite bornée $\nu(\alpha_k, D)$. Autrement dit : $\nu(\alpha_k, D)$ converge vers $\nu(\alpha, D)$, qed.
**Remarque** : on a obtenu $Z(\alpha) = \gamma + \lim Z(\alpha_k)$, donc la discontinuité eventuelle de $Z$ n'est pas remise en cause.

# Chapitre 5

# Appendice : exemples et contre-exemples

## 5.1 Remarques concernant le cas des surfaces

Soit $L$ un fibré en droites gros sur une surface projective. Pour tout $k > 0$, on peut écrire $|kL| = |M_k| + F_k$, où $|M_k|$ est la partie mobile de $|kL|$ et $F_k$ en est la partie fixe. Alors $\frac{1}{k}F_k \geq N(L)$, et $\frac{1}{k}F_k$ converge vers $N(L)$ au sens des courants (c'est en une conséquence du théorème 2.2.4). Mais en général, cette limite n'est pas stationnaire. On a en effet le résultat suivant :

**Théorème 5.1.1** *Soit $L$ est un fibré en droites gros sur une surface projective. Sont équivalentes :*
*(i) $P := L - N(L)$ est semi-ample, i.e. $kP$ est engendré par ses sections pour $k$ assez divisible.*
*(ii) $R(X, L) := \oplus_{k \geq 0} H^0(X, kL)$ est une algèbre de type fini sur $\mathbf{C}$.*
*(iii) $N(L) = \frac{1}{k}F_k$ pour tout $k$ assez grand.*

Tout ceci est bien connu, donc nous serons brefs :
(a) Si $P$ est semi-ample, alors $R(X, L) = R(X, P)$ est de type fini sur $\mathbf{C}$.
**Démonstration** : si $(X, P) = (\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1))$, c'est bien sûr vrai car

$$R(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(1)) = \mathbf{C}[x_0, ..., x_n].$$

Si $P = \mathcal{O}(1)_{|X}$ pour un plongement $X \subset \mathbf{P}^N$, alors

$$H^0(\mathbf{P}^N, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X, lP)$$

est surjective pour $l$ assez grand, donc $R(X, lP)$ est de type fini pour $l$ assez grand. Ceci implique que $R(X, P)$ lui-même est de type fini. Enfin dans le cas général, on choisit $l$ assez grand pour que $lP$ soit engendré par ses sections,

et l'on considère la partie connexe $f : X \to Y$ de $\Phi_{|kP|}$ dans sa factorisation de Stein. On a alors $P = f^\star A$ avec $A$ ample, et $R(X,P) = R(Y,A)$ car $f$ est connexe, donc le résultat suit.
(b) Si $R(X,L)$ est de type fini, il existe $k_0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ la multiplication $H^0(X,kL) \otimes H^0(X,lL) \to H^0(X,(k+l)L)$ est surjective pour tout $l$. On voit donc que $F_{mk} = mF_k$ pour tout $k \geq k_0$ et tout $m > 0$, et donc que à la limite que $N(L) = \frac{1}{k}F_k$ pour tout $k \geq k_0$.
(c) Si $N(L) = \frac{1}{k}F_k$, on a $kP(L) = M_k$. Or $B_{|M_k|}$ est de dimension 0, et on conclut grâce au lemme bien connu :

**Lemme 5.1.2 (Zariski)** *Si $L$ est un fibré en droites avec $B_{|L|}$ de dimension 0, $L$ est semi-ample.*

Si $C$ est une courbe irréductible exceptionnelle sur une surface projective $X$, on sait d'après Grauert qu'il existe une modification $\mu : X \to Y$ vers une surface normale $Y$ de lieu exceptionnel $C$. $Y$ est donc une surface de Moishezon, singulière en général, et on peut se demander s'il est possible de construire un morphisme $\Phi : X \to Y$ vers une surface *projective* singulière $Y$ tel que $\Phi(C)$ soit un point. On sait que la réponse est en général négative, et ce phénomène est lié à la question précédente, puisque $\Phi$ existe ssi il existe un fibré en droites gros et semi-ample $L$ sur $X$ tel que $L \cdot C = 0$, ou encore : $C$ est contenue dans le lieu non-kählerien de $L$. Or on peut toujours trouver un fibré gros et nef $L$ tel que $L \cdot C = 0$. En effet, il suffit de partir d'un fibré ample $A$ sur $X$, et de considérer sa projection orthogonale $L$ parallèlement à $C$. On a $L = A - \frac{A \cdot C}{C^2}C$, donc $L$ est un $\mathbf{Q}$-fibré gros, de lieu non nef contenu dans $C$. Comme de plus $L \cdot C = 0$ par construction, $L$ est nef et gros, de lieu non kählerien $C$ exactement. Réciproquement, si $L$ est un fibré nef et gros de lieu non kählerien $C$, alors $A := L - \varepsilon C$ est ample pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Pour le voir, on choisit un courant kählerien $T$ dans $c_1(L)$ tel que $E_+(T) = C$. On a alors $T = R + \nu(T,C)[C]$, donc $L - \nu(T,C)C$ est ample. Puisque $L$ est nef, $L - \varepsilon C$ est lui-aussi ample pour tout $0 < \varepsilon \leq \nu(T,C)$.
Si $C$ vérifie de plus la condition $(\star)$ : $Pic(X) \to Pic(C)$ est injective, alors $L \cdot C = 0$ implique que $C \subset B_{|kL|}$ pour tout $k > 0$, puisque $\mathcal{O}_C(L) \in Pic^0(C)$ ne peut être de torsion. En particulier, il existe dans ce cas des fibrés nef et gros $L$ sur $X$ de lieu non kählerien $C$, mais aucun d'entre eux n'est semi-ample.
**Exemple :** on part d'une courbe irréductible lisse $B$ sur une surface $Y$ avec $Pic(Y) = \mathbf{Z}H$, et l'on considère l'éclatement $\pi : X \to Y$ de $Y$ aux points $p_1, ..., p_N \in B$, de diviseur exceptionnel $E = E_1 + ... + E_N$. On a donc $Pic(X) = \mathbf{Z}\pi^\star H \oplus \mathbf{Z}E_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}E_N$. Soit $C$ la transformée stricte de $B$ sous $\pi$. D'une part, on a $C^2 = B^2 - N$, donc $C$ est exceptionnelle dès que $N > B^2$ ; d'autre part, la restriction d'un fibré $a\pi^\star H + \sum b_i E_i \in Pic(X)$ à

$B$ correspond au fibré $\mathcal{O}_B(aH - \sum b_i p_i) \in Pic(B)$. Pour assurer la condition $(\star)$, il suffit donc de choisir les $p_i$ de sorte que $\mathcal{O}_C(H)$ et $p_1, ..., p_N$ soient $\mathbf{Z}$-indépendants dans $Pic(B)$, ce qui est possible dès lors que $B$ n'est pas une courbe rationnelle (car $Pic^0(B)$ est alors un tore non-trivial). Pour être complet, inspectons le cas d'une courbe rationnelle. Soit donc $C$ une courbe rationnelle lisse sur une surface projective lisse $X$, de carré $C^2 = -d < 0$, et soit $L$ un fibré en droites nef et gros de lieu non kählerien $C$. Je dis que $L$ est nécessairement semi-ample dans ce cas. On peut écrire $L = A + \frac{1}{m}C$ avec $A$ ample et $m > 0$, et on peut supposer que $m = 1$ quitte à changer $L$ en $mL$. On a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X(kL - (l+1)C) \to \mathcal{O}_X(kL - lC) \to \mathcal{O}_C(kL - lC) \to 0,$$

et comme $h^1(\mathcal{O}_C(kL - lC)) = h^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(ld)) = 0$, pour tout $l > 0$, on voit que $h^1(\mathcal{O}_X(kL - (l+1)C)) = 0$ implique $h^1(\mathcal{O}_X(kL - lC)) = 0$. Si $k$ est assez grand, $h^1(\mathcal{O}_X(kL - kC)) = h^1(\mathcal{O}_X(kA)) = 0$, et par ce qui précède on a donc $h^1(\mathcal{O}(kL - C)) = 0$ pour un tel $k$. Ceci implique que $kL$ est engendré par ses sections, puisque $\mathcal{O}_C(kL)$ est trivial, et le résultat suit. Quand $d = 1$, i.e. quand $C$ est une courbe exceptionnelle de première espèce, $Y$ est lisse (critère de Castelnuevo).

## 5.2 Trois contre-exemples en dimension supérieure

Nous allons présenter trois contre-exemples à des questions naturelles relatives à la décomposition de Zariski. Le premier, essentiellement dû à S.D.Cutkosky, est celui d'un diviseur gros $L$ sur une variété projective de dimension 3 dont le volume est irrationnel.
Le second est celui d'un diviseur gros $L$ sur une variété projective $X$ de dimension 4 tel qu'il n'existe pas de modification $\mu : \widetilde{X} \to X$ pour laquelle $Z(\mu^\star\{L\})$ soit nef.
Le dernier exemple est un diviseur irréductible $D$ sur variété projective de dimension 3 tel que $\alpha \mapsto \nu(\alpha, D)$ soit discontinu au bord du cône pseudoeffectif. Les deux derniers exemples sont dûs à N.Nakayama [Nak98].
Dans les trois cas, la variété $X$ est construite comme le projectivisé d'une somme de fibrés en droites. Soit donc $Y$ une variété kählerienne compacte de dimension $m$, et $L_0, ..., L_r$ des fibrés en droites sur $Y$. Soit

$$X := \mathbf{P}(L_0 \oplus ... \oplus L_r)$$

le fibré des hyperplans du fibré vectoriel $L_0 \oplus ... \oplus L_r$, muni de sa projection $\pi : X \to Y$ ; on note $H := \mathcal{O}(1)$ le fibré en droites tautologique relativement ample associé. Pour tout $i$, la projection $L_0 \oplus ... \oplus L_r \to L_0 \oplus ... \oplus \widehat{L_i} \oplus ... \oplus L_r$ parallèlelement à $L_i$ induit une inclusion de

$$D_i := \mathbf{P}(L_0 \oplus ... \oplus \widehat{L_i} \oplus ... \oplus L_r)$$

comme hypersurface lisse de $X$, avec de plus $D_i + \pi^\star L_i$ linéairement équivalent à $H$ pour tout $i$. Il est bien connu que

$$H^{1,1}(X, \mathbf{R}) = \pi^\star H^{1,1}(Y, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}h,$$

avec $h := c_1(H)$. On notera aussi $d_i := c_1(D_i)$, $l_i := c_1(L_i)$, et enfin $\mathcal{C} \subset NS(Y)_\mathbf{R}$ désignera l'enveloppe convexe des $l_i$.
On s'intéresse aux cônes nef et pseudoeffectif de $X$ :

**Proposition 5.2.1** *Soit $\alpha = \pi^\star\beta + \lambda h$ un élément de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Alors*
*(i) $\alpha$ est nef ssi $\lambda \geq 0$ et $\beta + \lambda\mathcal{C}$ est contenu dans $\mathcal{N}_Y$.*
*(ii) $\alpha$ est pseudoeffective ssi $\lambda \geq 0$ et $\beta + \lambda\mathcal{C}$ rencontre $\mathcal{E}_Y$.*

**Démonstration** : on remarque d'abord que si $\alpha$ est pseudoeffective, sa restriction à la fibre très générale de $\pi$ l'est aussi ; $\lambda$ est donc nécessairement positif dans ce cas, puisque $h$ est relativement ample. On suppose donc dans la suite que $\lambda \geq 0$.

(i) si $\alpha$ est nef, sa restriction $\alpha_{|\mathbf{P}(L_i)}$ est nef pour tout $i$ ; or $\pi$ induit un isomorphisme $\mathbf{P}(L_i) \to Y$, pour lequel le fibré $H_{|\mathbf{P}(L_i)}$ s'identifie à $L_i$. On en déduit que la classe nef $\alpha_{|\mathbf{P}(L_i)}$ s'identifie à $\beta + \lambda l_i$, qui est donc nef pour tout $i$. Ceci revient à dire que $\beta + \lambda\mathcal{C}$ est contenu dans le cône nef de $Y$. Inversement, on note que $\alpha = \pi^\star(\beta + \lambda l_i) + \lambda\{D_i\}$ puisque $h = \{D_i\} + \pi^\star l_i$ ; si $\beta + \lambda l_i$ est nef, le lieu non nef de $\alpha$ est donc contenu dans $D_i$. Dans l'hypothèse où chacun des $\beta + \lambda l_i$ est nef, le lieu non nef de $\alpha$ est contenu dans l'intersection de tous les $D_i$, qui est vide.

(ii) Soit $t_0 l_0 + ... + t_r l_t$ une combinaison convexe des $l_i$ telle que $\beta + \lambda \sum t_i l_i$ soit pseudoeffective. On peut alors écrire $h = \sum t_i h = \sum t_i \pi^\star l_i + \sum t_i\{D_i\}$, et donc $\alpha = \pi^\star(\beta + \lambda \sum t_i l_i) + \lambda \sum t_i \{D_i\}$ est pseudoeffective comme somme de deux classes pseudoeffectives. Réciproquement, on suppose que $\alpha$ est pseudoeffective. Alors la restriction de $\alpha - \nu(\alpha, D_0)\{D_0 = \pi^\star(\beta + \nu(\alpha, D_0)l_0) + (\lambda + \nu(\alpha, D_0))h$ à $D_O$ est pseudoeffective. Par récurrence sur $r$, il vient que $\beta + \nu(\alpha, D_0)l_0 + (\lambda + \nu(\alpha, D_0))\mathcal{C}_0$ rencontre le cône pseudoeffectif de $Y$, si $\mathcal{C}_0$ désigne l'enveloppe convexe de $l_1, ..., l_r$. Le résultat suit.
A partir de maintenant, on suppose de plus que $\mathcal{N}_Y = \mathcal{E}_Y$. Ceci se produit par exemple lorsque $Y$ est une courbe, ou lorsque $Y$ a un fibré tangent $T_Y$ nef (cf. [DPS94]). D'après le début de la preuve du (ii) ci-dessus, cette hypothèse implique que le lieu non nef de toute classe pseudoeffective $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est contenu dans la réunion des $D_i$. Si $I$ est une partie

de $\{0,...,r\}$ de complémentaire $J$, on note $V_I := \cap_{i\in I} D_i = \mathbf{P}(\oplus_{j\in J} L_j)$ et $\mathcal{C}_I \subset NS(Y)_{\mathbf{R}}$ l'enveloppe convexe des $l_i$ pour $i \in I$. Le fibré normal $N_{V_I/X}$ est isomorphe à $\oplus_{i\in I}\mathcal{O}_{V_I}(D_i) = \oplus_{i\in I}\mathcal{O}_{V_I}(H - \pi^\star L_i)$. Avec ces notations, on a la

**Proposition 5.2.2** *Soit $\alpha \in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ une classe pseudoeffective, qu'on écrit $\alpha = \pi^\star\beta + \lambda h$. La multiplicité minimale générique de $\alpha$ le long de $V_I$ vaut*

$$\nu(\alpha, V_I) = \lambda \min\{t \geq 0, \beta + t\mathcal{C}_I + (1-t)\mathcal{C}_J \cap \mathcal{N}_Y \neq \emptyset\},$$

*et l'on a $\nu(\alpha, V_I) = \nu(\alpha, x)$ pour tout $x \in V_I - \cup_{j\in J} D_j$.*

**Démonstration** : soit $\mu : X_I \to X$ l'éclatement de $X$ le long de $V_I$, et $E_I$ son diviseur exceptionnel. On a donc $E_I = \mathbf{P}(N^\star_{V_I/X})$, le fibré projectif des droites de $N_{V_I/X}$, et $\nu(\alpha, V_I) = \nu(\mu^\star\alpha, E_I)$ d'après la proposition ??. Soit $H_I$ le fibré tautologique sur $E_I = \mathbf{P}(\oplus_{i\in I}\mathcal{O}_{V_I}(\pi^\star L_i - H)$ et $t \geq 0$. On a $\mathcal{O}_{E_I}(-E_I) = H_I$, donc dire que $\mu^\star\alpha - t\{E_I\}$ est pseudoeffective sur $E_I$ revient à dire que $\alpha + tConv\{\pi^\star l_i - h, i \in I\} = \alpha - th + t\pi^\star\mathcal{C}_I$ rencontre $\mathcal{E}_{V_I}$, ou encore que $\beta + t\mathcal{C}_I + (\lambda - t)\mathcal{C}_J$ rencontre $\mathcal{E}_Y = \mathcal{N}_Y$. Comme $\mu^\star\alpha - \nu(\alpha, V_I)\{E_I\}$ est pseudoeffective sur $E_I$, on a donc une des inégalités. Inversement, si $\gamma := \beta + t\sum_{i\in I} a_i l_i + (\lambda - t)\sum_{j\in J} b_j l_j$ est nef sur $Y$ (avec $\sum a_i = \sum b_j = 1$), alors $\alpha = \pi^\star(\gamma) + \{t\sum_{i\in I} a_j D_i\} + (\lambda - t)\{\sum_{j\in J} b_j D_j\}$ vérifie $\nu(\alpha, x) \leq t\sum a_i = t$ pour $t \in V_I$ générique (i.e. hors des $D_j$ pour $j \in J$), et donc $\nu(\alpha, V_I)$ est plus petit que le membre de droite de l'égalité à montrer, qed.

Cette proposition nous dit que $D_0 \cup ... \cup D_r$ est stratifié par les ensembles $\cap_{i\in I} D_i - \cup_{i\in J} D_j$, sur lesquels les multiplicités minimales $\nu(\alpha, x)$ sont constantes.

On spécialise encore la situation en prenant maintenant pour $Y$ une surface projective telle que $\mathcal{N}_Y = \mathcal{E}_Y$. Ce cône coincide donc aussi avec le cône quadratique positif $\overline{\mathcal{P}}$ de $Y$.

**Un volume irrationnel**

On prend $X = \mathbf{P}(\mathcal{O}(A_0) \oplus \mathcal{O}(-A_1))$ avec $A_1$ et $A_2$ amples sur $Y$. Dans ce cas, $H$ est gros car $A_0$ est ample. Son lieu non nef est la surface $D_0 = \mathbf{P}(\mathcal{O}(-A-1))$ et on a $\nu(h, x) = \min\{t \geq 0, ta_0 - (1-t)a_1 \in \mathcal{P}\}$ pour tout $x \in D_0$. Comme $\nu(\alpha, x) = \nu(Z(\alpha, x) + \nu(N(\alpha), x)$ pour tout $x \in X$ et toute classe pseudoeffective $\alpha$, on voit que $Z(h)$ est nef. $\nu(h, D_0)$ est aussi la plus petite racine positive du polynôme quadratique $P(t) := (t(a_0 + a_1) - a_1)^2$. Pour un choix générique de $A_0$ et $A_1$, cette racine va donc être irrationnelle, et l'on obtient ainsi un fibré en droites gros $H$ avec $Z(h)$ nef mais $N(h)$ irrationnelle.

**Une classe grosse sans partie nef**

Pour ce second exemple, on prend $X = \mathbf{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(A_1) \oplus \mathcal{O}(A_2))$, avec $A_1$ et $A_2$ amples, et l'on considère $\alpha = \pi^\star\beta + h$ telle que :
(i) $\beta$ est non nef.
(ii) $\beta + a_1$ et $\beta + a_2$ sont nef.
Dans ce cas, $\alpha$ est nef en codimension 1, mais pas nef. Son lieu non nef est $V = D_1 \cap D_2$, avec $D_1 = \mathbf{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(A_2))$ et $D_2 = \mathbf{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(A_1))$. La multiplicité minimale $\nu(\alpha, x) = \nu$ est constante pour $x \in V$, égale au plus petit des réels $t \geq 0$ tel que $\beta + t[a_1, a_2]$ rencontre $\overline{\mathcal{P}}$. On demande de plus que :
(iii) $\beta + \nu[a_1, a_2]$ est tangent à $\overline{\mathcal{P}}$ en $\beta + \nu x$ avec $x \in ]a_1, a_2[$.
Posons $X_0 := X$, $E_0 := D_1$, $G_0 := D_2$ et $V_0 := V$. On considère l'éclatement $\pi_1 : X_1 \to X_0$ le long de $V_0$, de diviseur exceptionnel $E_1$. On note $G_1$ la transformée stricte de $G_0$, qui est une hypersurface lisse de $X_1$ qui intersecte $E_1$ transversalement selon une surface $V_1$ isomorphe à $V$ par projection. Par récurrence, on définit $\pi_n : X_n \to X_{n-1}$ l'éclatement le long de $V_{n-1}$, de diviseur exceptionnel $E_n$. On note $G_n$ la transformée stricte de $G_{n-1}$, qui coupe transversalement $E_n$ selon un surface $V_n$ isomorphe à $V$ par projection. On pose $\alpha_n := Z(\mu_n^\star \alpha_{n-1})$, qui est aussi égale à $\mu_n^\star \alpha_{n-1} - \nu(\alpha_{n-1}, V_{n-1})\{E_n\}$ grâce à la relation

$$\nu(\pi_n^\star \alpha_{n-1}, E_n) = \nu(\alpha_{n-1}, V_{n-1})$$

(cf. proposition 2.1.10). N.Nakayama montre dans [Nak98] que que $V_n$ est contenu dans le lieu non nef de $\alpha_n$ pour tout $n$, i.e. que $\nu_n := \nu(\alpha_n, V_n)$ est strictement positif.
Nous ne reproduisons pas la preuve, qui est technique et pas très parlante, mais nous allons démontrer le critère suivant, aussi extrait de [Nak98], qui permet de conclure :

**Lemme 5.2.3** *Soit $\pi_n : X_n \to X_{n-1}$ une suite d'éclatements de centres lisses $V_{n-1} \subset X_{n-1}$ de codimension deux et de diviseurs exceptionnels $E_n \subset X_n$, et $\alpha_0$ une classe grosse et nef en codimension 1 sur $X_0$, tels que :*
*(i) $V_n \subset E_n$ pour tout $n$.*
*(ii) $V_n$ est contenu dans le lieu non nef de la transformée stricte $\alpha_n \in H^{1,1}(X_n, \mathbf{R})$ de $\alpha_0$ sous $\pi_n$.*
*Alors il ne peut exister de modification $\mu_0 : \widetilde{X}_0 \to X_0$ telle que $Z(\mu_0^\star \alpha_0)$ soit nef.*

**Démonstration** : on raisonne par l'absurde en supposant l'existence de $\mu_0$. On peut alors construire deux suites de modifications $\mu_n : \widetilde{X}_n \to X_n$ et $\widetilde{\pi}_n : \widetilde{X}_n \to \widetilde{X}_{n-1}$ telles que $\mu_{n-1} \circ \widetilde{\pi}_n = \pi_n \circ \mu_n$. Si l'on note $\widetilde{\alpha}_0 := \mu_0^\star \alpha_0$ et $\widetilde{\alpha}_n$ le tiré en arrière de $\widetilde{\alpha}_0$ sous la composée $\widetilde{X}_n \to \widetilde{X}_0$, le fait que $Z(\widetilde{\alpha}_0)$ soit nef implique que la décomposition de Zariski de $\widetilde{\alpha}_n$ est juste le tiré en arrière de celle de $\widetilde{\alpha}_0$ pour tout $n$. En particulier, le nombre de diviseurs irréductibles apparaissant dans la partie négative de $\widetilde{\alpha}_n$ est indépendant de $n$. D'un autre côté, on va montrer que la transformée stricte de $E_n \subset \mathrm{X}_n$ sous $\mu_n$ appartient au lieu non nef de $\widetilde{\alpha}_n$, ce qui implique que le nombre de composantes de sa partie négative est strictement croissant, en contradiction avec ce qui précède. Ceci résulte simplement du fait que $E_n$ apparaît dans le lieu non nef de $\pi_n^\star\alpha_{n-1}$, à cause de la relation

$$\nu(\pi_n^\star\alpha_{n-1}, E_n) = \nu(\alpha_{n-1}, V_{n-1})$$

(cf. proposition 2.1.10).

**Multiplicités minimales discontinues**

On pose $X := \mathbf{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-L))$, avec $L$ nef, de classe $l \in \partial\mathcal{P}$. Soit $D_0 := \mathbf{P}(\mathcal{O}(-L))$. Si $\alpha = \pi^\star\beta + h$ est une classe pseudoeffective sur $X$, $\nu(\alpha, D_0)$ est le plus petit réel $t \geq 0$ tel que $\beta - (1-t)l$ soit nef. Si $\beta \in \partial\mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$, on a $(\beta - \varepsilon l)^2 = -2\varepsilon\beta \cdot l$, qui est négatif, et nul ssi $\beta$ est proportionnel à $l$, car $l^\perp$ rencontre $\partial\mathcal{P}$ selon $\mathbf{R}l$ puisque la forme d'intersection est non-dégénérée. Il en résulte que $\nu(\pi^\star l + h, D_0) = 0$, alors que $\nu(\pi^\star\beta + h, D_0) = 1$ dès que $\beta \in \partial\mathcal{P}$ n'est pas proportionnel à $l$. En particulier, $\alpha \mapsto \nu(\alpha, D_0)$ n'est pas continu en $\pi^\star l + h$.

# Chapitre 6

# Bibliographie


- [**BT76**] Bedford, E. ; Taylor, B.A. – *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **37** (1976), 1–44.
- [**Bon93**] Bonavero, L. — *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, C. R. Acad. Sci. Série I **317** (1993), 1163–1166.
- [**Bou01**] Boucksom, S. — *Le cône kählerien d'une variété hyperkählerienne*, C. R. Acad. Sci. Série I (2001), 935–938.
- [**Bou02a**] Boucksom, S. — *On the volume of a line bundle*, math.AG/0201031 (2002).
- [**Bou02b**] Boucksom, S. — *Higher dimensional Zariski decompositions*, math.AG/0204336 (2002).
- [**Buc99**] Buchdahl, N. — *On compact Kähler surfaces*, Ann. Inst. Fourier **50** (1999), 287–302.
- [**Cut86**] Cutkosky, S.D. — *Zariski decomposition of divisors on algebraic varieties*, Duke Math. J. **53** (1986), 149–156.
- [**Dem82**] Demailly, J.-P. — *Estimations $L^2$ pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählerienne complète*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **15** (1982), 457–511.
- [**Dem85**] Demailly, J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d''$-cohomologie*, nn. Inst. Fourier **35** (1985), 189–229.
- [**Dem92**] Demailly, J.-P. — *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 361–409.
- [**Dem93**] Demailly, J.-P. — *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Diff. Geom. **37** (1992), 323–374.
- [**Dem96**] Demailly, J.-P. — *in Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et synthèses, S.M.F. **3** (1996), 3–111.
- [**Dem97**] Demailly, J.-P. — *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Symp. Pure Math. **62.2** (1997).

- **[DEL00]** Demailly, J.-P. ; Ein, L. ; Lazarsfeld, R. — *A subadditivity property of multiplier ideals*, math.AG/0002035 (2000).
- **[DP01]** Demailly, J.-P. ; Paun, M. — *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold*, math.AG/0105176 (2001).
- **[DPS94]** Demailly, J.-P. ; Peternell, T. ; Schneider, M. — *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 295-345.
- **[DPS00]** Demailly, J.-P. ; Peternell, T. ; Schneider, M. — *Pseudoeffective line bundles on compact Kähler manifolds*, math.AG/0006205 (2000).
- **[ElM84]** El Mir,H. — *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta. Math. **153** (1984), 1–45.
- **[Fuj79]** Fujita, T. — *On Zariski problem*, Proc. Japan Acad., Ser. A **55** (1979), 106–110.
- **[Fuj89]** Fujita, T. — *Remarks on quasi-polarized varieties*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 105–123.
- **[Fuj94]** Fujita, T. — *Approximating Zariski decomposition of big line bundles*, Kodai Math. J. **17** (1994), 1–3.
- **[Har77]** Hartshorne, R. — *Algebraic geometry*, Springer Verlag, GTM **52** (1977).
- **[Huy99]** Huybrechts, D. — *The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold*, math.AG/9909109 (1999).
- **[Huy01]** Huybrechts, D. — *Erratum : Compact hyperkähler manifolds : basic results*, math.AG/0106014 (2001).
- **[Gau77]** Gauduchon, P. — *Le théorème de l'excentricité nulle*, C. R. Acad. Sci. Série I **285** (1987), 389–390.
- **[Kod53]** Kodaira, K. — *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (2000), 1268–1273.
- **[JS93]** Ji, S. ; Shiffman, B. — *Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents*, J. Geom. Anal. **3**, 1 (1993), 37–61.
- **[Kin70]** King, J.R. — *A residue formula for complex subvarieties*, Proc. Carolina conf. on holomorphic mappings and minimal surfaces, Univ. North Carolina, Chapell Hill (1970), 43–56.
- **[Kis84]** Kiselman, C.O. — *Sur la définition de l'opérateur de Monge-Ampère*, Lecture Notes in Math. **1094**, Springer Verlag (1984), 139–150.
- **[Lam99]** Lamari, A. — *Courants kähleriens et surfaces compactes*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 249–263.
- **[Mou98]** Mourougane, C. — *Versions kähleriennes du théorème d'annulation de Bogomolov*, Collect. Math. **49**, 2-3 (1998), 433–445.

– [**Nak98**], Nakayama, N. — *Zariski decomposition and abundance*, preprint R.I.M.S.
– [**Nak00**], Nakamaye, M. — *Stable base loci of linear series*, Math. Ann. **318** (2000), 833–847.
– [**Nak02**], Nakamaye, M. — *Base loci of linear series are numerically determined*, math.AG/0204284 (2002).
– [**Pau98**] Paun, M. — *Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites*, Math. Ann. **310** (1998), 411–421.
– [**Siu74**] Siu, Y.T. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27**(1974), 53–156.
– [**Tak01**] Takayama S. — *Seshadri constants and the volume of big line bundles*, preprint.
– [**Yau78**] Yau, S.-T. — *On the Ricci curvature of a complex Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978).
– [**Zar62**] Zariski, O. — The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 560–615.