C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 935–938, 2001
Géométrie analytique/*Analytic Geometry*
(Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*)

Le cône kählérien d'une variété hyperkählérienne

Sébastien BOUCKSOM

Institut Fourier, Université Joseph Fourier, 100, rue des maths, 38041 Grenoble cedex, France
Courriel : sbouckso@ujf-grenoble.fr

(Reçu le 24 septembre 2001, accepté le 8 octobre 2001)

Résumé. Nous répondons à une question de D. Huybrechts concernant le cône kählérien d'une variété hyperkählérienne compacte. Plus précisément, nous montrons comment les méthodes qu'il utilise pour décrire l'adhérence de ce cône s'étendent en fait pour obtenir la description suivante : le cône kählérien d'une variété hyperkählérienne est l'ensemble des éléments du cône positif de la forme quadratique canonique qui sont strictement positifs sur les courbes rationnelles. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The Kähler cone of a hyperkähler manifold

Abstract. *We answer a question of D. Huybrechts about the Kähler cone of a compact hyperkähler manifold. More precisely, we show how the methods he uses to describe the closure of this cone do in fact extend to get the following description: the Kähler cone of a hyperkähler manifold is the set of elements of the positive cone attached to the canonical quadratic form which are positive on the rational curves.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit X une variété compacte hyperkählérienne irréductible, i.e. X est kählérienne, simplement connexe et l'espace des 2-formes holomorphes $H^0(X,\Omega_X^2)$ est une droite complexe engendrée par une 2-forme σ non-dégénérée en tout point. On note $2n$ la dimension de X et on normalise σ de sorte que $\int_X(\sigma\overline{\sigma})^n=1$. En utilisant la décomposition de Hodge $H^2(X,\mathbf{C})=(H^{2,0}\oplus H^{0,2})\oplus H^{1,1}$, on munit $H^2(X,\mathbf{C})$ d'une forme quadratique q_X (dite de Beauville–Bogomolov) définie comme suit : $q_X(\alpha)=\frac{n}{2}\int_X(\sigma\overline{\sigma})^{n-1}\alpha^2$ pour $\alpha\in H^{1,1}$, $q_X(\lambda\sigma+\mu\overline{\sigma})=\lambda\mu$, et $H^{1,1}$ est orthogonal à $H^{2,0}\oplus H^{0,2}$. On note alors $\mathcal{C}_X$ le cône quadratique positif de X, i.e. la composante connexe du cône kählérien $\mathcal{K}_X$ dans $\{\alpha\in H^{1,1}(X,\mathbf{R}),q_X(\alpha)>0\}$. Dans un preprint récent [3], D. Huybrechts montre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. – *Le cône nef $\overline{\mathcal{K}_X}$ de X est composé exactement des éléments α de l'adhérence $\overline{\mathcal{C}_X}$ du cône quadratique positif qui vérifient $\int_C\alpha\geqslant 0$ si $C\subset X$ est une courbe rationnelle.*

Mettons ceci en relation avec le critère de Nakai–Moishezon récemment obtenu par J.-P. Demailly et M. Paun [1] : si X est une variété kählérienne compacte, le cône nef (resp. le cône kählérien) de X est une des composantes connexes du cône formé des classes $\alpha\in H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ telles que $\int_Y\alpha^p$ est positif (resp. strictement positif) pour tout sous-ensemble analytique irréductible $Y\subset X$ de dimension p.

Note présentée par Jean-Pierre DEMAILLY.

S0764-4442(01)02158-9/FLA

Dans le cas où X est compacte hyperkählérienne, un résultat de A. Fujiki [2] (*cf.* aussi [4]) montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\int_X \alpha^{2n} = cq_X(\alpha)^n$ pour toute classe $\alpha \in H^2(X,\mathbf{C})$. Ainsi, le théorème 1.1 revient à dire qu'il suffit de tester la positivité pour $Y = X$ et Y une courbe rationnelle dans le critère de Nakai–Moishezon dans le cas hyperkählérien.

Si X est dépourvue de courbes rationnelles, il résulte immédiatement du théorème 1.1 que $\mathcal{C}_X = \mathcal{K}_X$, et nous nous proposons de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. – *Le cône kählérien $\mathcal{K}_X$ d'une variété compacte hyperkählérienne X est composé exactement des éléments $\alpha \in \mathcal{C}_X$ du cône positif qui vérifient $\int_C \alpha > 0$ si $C \subset X$ est une courbe rationnelle.*

Ceci répond à une question posée dans [3].

2. Explications

Pour obtenir le théorème 1.1, Huybrechts montre en fait un résultat plus fort : si $\alpha \in \mathcal{C}_X$ est très générale et $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C \subset X$, alors α est une classe kählérienne, l'expression « très générale » signifiant comme d'habitude « en dehors d'une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques ». Notre observation est la suivante : en décortiquant la démonstration du théorème 1.1, on s'aperçoit (*a posteriori*, i.e. en utilisant le théorème 1.1 !) qu'une classe de $\mathcal{C}_X$ positive sur les courbes rationnelles est déjà « très générale », et donc kählérienne.

Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques résultats concernant les déformations de X (*cf.* [4]). Rappelons d'abord que les obstructions à déformer X s'annulent (car le fibré canonique K_X est trivial), et comme de plus $h^0(X,T_X) = q(X) = 0$, X admet une déformation universelle, dont la base est un germe de variété complexe de dimension $h^{1,1}$, noté $(\mathrm{Def}(X),0)$. Toutes les petites déformations de X sont encore hyperkählériennes, et on obtient une application des périodes $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(X) \to \mathbf{P}H^2(X,\mathbf{C})$ en associant à $t \in \mathrm{Def}(X)$ la droite $H^{2,0}(X_t,\mathbf{C})$. Cette application est holomorphe, et arrive dans l'ouvert de la quadrique $Q := \{q_X = 0\}$ défini par $q_X(x+\overline{x}) > 0$. On montre que l'application $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(X) \to Q$ est étale (théorème de Torelli local).

Pour toute classe kählérienne α de X, il existe une déformation particulière de X, dite déformation twistorielle, obtenue comme suit : d'après le théorème de Calabi–Yau, il existe dans α une unique métrique kählérienne Ricci-plate ω, dont l'holonomie va être précisément $\mathrm{Sp}(n)$ car X est hyperkählérienne. Les quaternions $\mathbf{H}$ agissent alors comme endomorphismes parallèles de T_X, et chaque élément de la sphère unité de $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}I \oplus \mathbf{R}J \oplus \mathbf{R}K$ induit une structure complexe sur X. On montre que tout ceci s'organise en une déformation $\mathcal{X} \to \mathbf{P}^1$ de fibre centrale X, dont la classe de Kodaira–Spencer correspond à α sous l'isomorphisme naturel $H^1(X,T_X) \to H^{1,1}(X,\mathbf{C})$ induit par σ. Si l'on note $F(\alpha) = \mathbf{C}\sigma \oplus \mathbf{C}\overline{\sigma} \oplus \mathbf{C}\alpha \subset H^2(X,\mathbf{C})$, on montre que la droite $H^{2,0}(X_t)$ est contenue dans $F(\alpha)$ si X_t est la fibre correspondant à $t \in \mathbf{P}^1$ dans la déformation. Ainsi, l'application des périodes restreinte à la déformation twistorielle $\mathcal{P} : \mathbf{P}^1 \to Q$ arrive en fait dans la quadrique $T(\alpha) := Q \cap \mathbf{P}F(\alpha)$ du plan projectif $\mathbf{P}F(\alpha)$, donc permet d'identifier la base $\mathbf{P}^1$ de la déformation twistorielle associée à α avec $T(\alpha)$.

On peut du coup généraliser la déformation twistorielle à n'importe quelle classe α de type $(1,1)$: on pose $T(\alpha) := \mathcal{P}^{-1}\mathbf{P}F(\alpha)$ avec $F(\alpha)$ défini comme ci-dessus, et on appelle déformation twistorielle associée à α la restriction de la famille universelle à $T(\alpha)$ (qui n'est toutefois qu'un germe de courbe dans ce cas plus général). Dans ce cas, on montre à nouveau que la classe de Kodaira–Spencer de la déformation twistorielle s'identifie à α. Si α est de plus réelle, on montre que $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_t,\mathbf{R})$ est une droite réelle pour chaque $t \in T(\alpha)$, qui n'est autre que $\mathbf{R}\alpha$ pour $t = 0$.

Supposons maintenant que $\alpha \in \mathcal{C}_X$, et que l'on peut trouver $t_0 \in T(\alpha)$ proche de 0 avec $\mathcal{C}_{X_{t_0}} = \mathcal{K}_{X_{t_0}}$. Comme la droite $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_t,\mathbf{R})$ tend vers $\mathbf{R}\alpha$, on va pouvoir écrire $F(\alpha) \cap H^{1,1}(X_{t_0},\mathbf{R}) = \mathbf{R}\alpha_{t_0}$ avec α_{t_0} dans $\mathcal{C}_{X_{t_0}}$, donc dans $\mathcal{K}_{X_{t_0}}$. On a alors $F(\alpha) = F(\alpha_{t_0})$, et on obtient ainsi deux familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ au dessus de $T := T(\alpha)$, la première étant la déformation twistorielle de α et la seconde la restriction à $T(\alpha)$ de la déformation twistorielle de α_{t_0}, dont les fibres respectives au-dessus de t_0 sont isomorphes. On considère un ouvert maximal $V \subset T$ tel que les déformations de $X_{t_0} = X'_{t_0}$, à savoir $\mathcal{X}_{|V}$ et $\mathcal{X}'_{|V}$, soient isomorphes. On dispose du lemme suivant, dont la preuve est identique à celle du théorème 4.3 de [4] :

LEMME 2.1. – *Soient $\mathcal{X} \to S$ et $\mathcal{X}' \to S$ deux familles de variétés hyperkählériennes compactes au dessus d'une même base S, et soit $U \subset S$ un ouvert tel que $\mathcal{X}_{|U}$ et $\mathcal{X}'_{|U}$ soient isomorphes. Si $s_0 \in S$ est adhérent à U, il existe un cycle de dimension $2n$ $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j \subset X_{s_0} \times X'_{s_0}$ tel que :*
(i) *Z définit une application birationnelle $X_{s_0} \to X'_{s_0}$.*
(ii) *Les projections $Y_j \to X_{s_0}$ et $Y_j \to X'_{s_0}$ ne sont pas génériquement finies.*
(iii) *Γ est une valeur d'adhérence des graphes des isomorphismes $X_t \to X'_t$ pour $t \in U$.*

On veut montrer que ∂V est au plus dénombrable. La fibre très générale d'une (vraie) déformation twistorielle d'une classe kählérienne ne contient ni courbes ni diviseurs effectifs, donc il suffit de voir que pour $s \in \partial V$, X'_s doit contenir une courbe ou un diviseur effectif. Si tel n'est pas le cas, on applique le lemme précédent avec $s_0 = s$; comme X_s et X'_s sont minimales et que X'_s n'a pas de courbes, Z définit en fait un isomorphisme entre X_s et X'_s ; comme X'_s ne contient pas de diviseur effectif, les $(Y_j)_\star : H^2(X_s) \to H^2(X'_s)$ sont nuls, et un calcul de volume montre alors que les Y_j eux-mêmes sont nuls. Il en résulte que $Z = \Gamma$ induit un isomorphisme $X_s \to X'_s$ qui prolonge $\mathcal{X}_{|V} \to \mathcal{X}'_{|V}$, ce qui contredit la maximalité de V. Ainsi ∂V est bien au plus dénombrable ; il ne saurait donc séparer les deux ouverts V et $T - \overline{V}$ si ce dernier était non-vide, d'où : $\overline{V} = T$.

En particulier, on obtient que $0 \in T(\alpha)$ est adhérent à V, et on peut à nouveau appliquer le lemme. On voit alors que $(\Gamma)_\star(\alpha) \in H^2(X'_0, \mathbf{R})$ engendre la droite réelle $F(\alpha_{t_0}) \cap H^{1,1}(X'_0, \mathbf{R})$, qui est nécessairement engendrée par une classe kählérienne puisque X'_0 est une des fibres de la déformation twistorielle de X'_{t_0} associée à α_{t_0}. On obtient au total la

PROPOSITION 2.2. – *Si X est hyperkählérienne compacte et $\alpha \in \mathcal{C}_X$ vérifie :*
$(\star)$ *il existe t proche de 0 dans $T(\alpha)$ tel que $\mathcal{C}_{X_t} = \mathcal{K}_{X_t}$*
alors il existe X' hyperkählérienne compacte et un cycle de dimension $2n$ $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j \in X \times X'$ tels que :
(i) *Z induit une application birationnelle $X \to X'$.*
(ii) *Les projections $Y_j \to X$ et $Y_j \to X'$ ne sont pas génériquement finies.*
(ii) *$(\Gamma)_\star(\alpha) \in H^2(X', \mathbf{R})$ est une classe kählérienne.*

Ceci correspond au corollaire 2.4 de [3], avec l'hypothèse $(\star)$ en place de « α très générale ». Admettons un moment le

LEMME 2.3. – *Soit X est hyperkählérienne compacte et $\alpha \in \mathcal{C}_X$ telle que $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle C. Alors $(\star)$ est vérifiée.*

On peut alors achever la démonstration du théorème 1.2 : considérons $\alpha \in \mathcal{C}_X$ avec $\int_C \alpha > 0$ pour toute courbe rationnelle $C \subset X$. On obtient alors X' et $\Gamma = Z + \sum n_j Y_j$ comme dans la proposition. Le fait que $\int_C \alpha > 0$ pour toute C rationnelle et que $\Gamma_\star(\alpha)$ est kählérienne impliquent que l'image de chaque $Y_j \to X'$ est de codimension au moins deux (*cf.* preuve du théorème 2.5 de [3]), et donc que $(Y_j)_\star : H^2(X) \to H^2(X')$ est nul. Ainsi $Z_\star(\alpha) = \Gamma_\star(\alpha)$ est une classe kählérienne, ce qui signifie que l'application birationnelle $f : X \to X'$ induite par Z envoie la classe α, qui est strictement positive sur les courbes rationnelles, sur une classe kählérienne, et la proposition 2.1 de [3] permet de conclure que f est en fait un isomorphisme, et donc que α est une classe kählérienne.

Venons en au lemme 2.3 : on a déjà vu que la classe de Kodaira–Spencer κ de la déformation twistorielle de X associée à α correspond à α sous l'isomorphisme $H^1(X, T_X) \to H^{1,1}(X)$ induit par la contraction avec $\sigma \in H^{2,0}(X)$. La classe d'une courbe $[C] \in H^{2n-1,2n-1}(X)$ reste de type $(2n-1, 2n-1)$ dans la déformation twistorielle si et seulement si son cup produit avec κ est nul, ce qui se réécrit $\int_C \alpha \neq 0$ d'après ce qui précède ; ainsi l'hypothèse sur α signifie que la classe $[C] \in H^{2n-1,2n-1}(X)$ de toute combinaison effective de courbes rationnelles change de type au cours de la déformation twistorielle associée à α.

Maintenant, si la fibre très générale de cette déformation devait contenir une courbe rationnelle, celle-ci se déformerait en une famille de combinaisons effectives de telles courbes, ce qui donnerait sur la fibre centrale une combinaison effective de courbes rationnelles dont le type reste constant au cours de la déformation, ce qui est absurde. Ainsi, la fibre très générale X_t de la déformation twistorielle associée à α ne contient pas de courbes rationnelles, ce qui implique $\mathcal{C}_{X_t} = \mathcal{K}_{X_t}$ d'après le théorème 1.1. $\square$

Références bibliographiques

[1] Demailly J.-P., Paun M., Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold, math.AG/0105176, 2001.
[2] Fujiki A., On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold, Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987) 105–165.
[3] Huybrechts D., The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold, math.AG/9909109 v2, 2001.
[4] Huybrechts D., Compact hyperkähler manifolds: basic results, Invent. Math. 135 (1999) 63–113.