Quelques problèmes asymptotiques en géométrie complexe

Sébastien Boucksom

CNRS et Université Paris 6, équipe topologie et géométrie algébriques, F-75251 Paris Cedex 05, France.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire présente un ensemble de résultats de géométrie complexe dont le fil conducteur est le comportement asymptotique des sections des grandes puissances d'un fibré en droites.

La première partie porte sur deux travaux réalisés en collaboration avec Charles Favre et Mattias Jonsson [**BFJ08a, BFJ09**], et qui se placent dans le cadre de la géométrie algébrique complexe. Le premier démontre la différentiabilité du volume des diviseurs et en donne des applications inspirées de la géométrie des corps convexes. Le second étudie la dynamique des itérées F^k d'une application rationnelle F d'une surface X dans elle-même, en décrivant le comportement asympotique de l'action de F^k sur la cohomologie de X.

La seconde partie regroupe des travaux réalisés avec Robert Berman, Vincent Guedj et Ahmed Zeriahi [**BB08, BBGZ09**]. Le cadre général en est la théorie du pluripotentiel et une version géométrique de la théorie des polynômes orthogonaux, vus comme sections d'un fibré en droites hermitien. On généralise à ce cadre d'anciens résultats de théorie du potentiel qui dessinent les liens entre diamètre transfini, énergie logarithmique, points de Fekete et mesures d'équilibre, et dont certains d'entre eux étaient conjecturés en dimension supérieure depuis quelque temps déjà. L'opérateur de Monge-Ampère complexe y joue, comme toujours en théorie du pluripotentiel, un rôle central.

La dernière partie du mémoire concerne quant à elle la géométrie d'Arakelov. On discute d'abord les résultats du travail [**BC09**] en commun avec Huayi Chen, dans lequel on étudie le volume arithmétique des fibrés en droites en introduisant une version arithmétique des corps d'Okounkov. On conclut enfin avec un théorème d'équidistribution des points de petite hauteur tiré de [**BB08**] qui trouve sa source dans les travaux de Szpiro-Ullmo-Zhang et fait le lien avec les résultats de la deuxième partie.

CHAPITRE 1

Volumes des diviseurs et systèmes dynamiques rationnels

La première partie de ce mémoire est consacrée à deux problèmes de géométrie algébrique qui sont *a priori* encodés par une infinité de modèles birationnels de la variété ambiante. Il s'agit des travaux [**BFJ08a**] et [**BFJ09**], tous deux réalisés en collaboration avec Charles Favre et Mattias Jonsson.

1.1. Différentiabilité du volume

1.1.1. La fonction volume. Soit X une variété algébrique projective définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et soit n sa dimension.

Si A est un fibré en droites ample sur X, il résulte de la version asymptotique du théorème de Riemann-Roch et du théorème d'annulation de Serre que la dimension $h^0(kA)$ de l'espace des sections globales $H^0(kA)$ est une fonction polynomiale de degré n pour k assez grand. On a plus précisément

$$h^0(kA) = \frac{k^n}{n!}(A^n) + O(k^{n-1}) \tag{1.1}$$

où $(D_1 \cdot ... \cdot D_n)$ désigne le nombre d'intersection de diviseurs de Cartier $D_1, ..., D_n$.

Si L est maintenant un fibré en droites quelconque sur X on peut choisir un diviseur de Cartier effectif F tel que $A := L+F$ soit ample, et l'injection $H^0(kL) \subset H^0(kA)$ montre que $h^0(kL) = O(k^n)$. On définit alors le *volume* de L par

$$\operatorname{vol}(L) = \limsup_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(kL) \in [0, +\infty[.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\operatorname{vol}(L) > 0$ ssi il existe une *décomposition de Kodaira* de L, i.e. une décomposition $L = A+E$ avec A un $\mathbb{Q}$-diviseur ample et E un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif E. On dit alors que L est *gros*, propriété également équivalente au fait que les sections globales de kL plongent X birationnellement sur son image dans $\mathbb{P}H^0(kL)$ pour $k \gg 1$.

Le volume $\operatorname{vol}(L)$ mesure la positivité de L en tant que fibré gros, et s'étend aux $\mathbb{Q}$-diviseurs en utilisant que $\operatorname{vol}(kL) = k^n \operatorname{vol}(L)$.

La compréhension des fibrés gros et de leur volume a connu des progrès très rapides à partir du milieu des années 90 et l'ouvrage [**Laz**] constitue une référence très complète sur le sujet. Un des résultats de base de la théorie est le théorème de Fujita, qui fait le lien entre le volume et la théorie de l'intersection. Ce théorème, démontré par Fujita et Demailly-Ein-Lazarsfeld (et en caractéristique quelconque dans [**LM09**]) énonce que le volume d'un fibré gros L satisfait

$$\operatorname{vol}(L) = \sup_{\pi^*L=A+E} \operatorname{vol}(A) \tag{1.2}$$

où $\pi : X_\pi \to X$ parcourt tous les morphismes projectifs birationnels vers X et $\pi^*L = A + E$ les décompositions de Kodaira de π^*L sur X'. Étant donné que $\operatorname{vol}(A) = (A^n)$ lorsque A est ample par (1.1), il en résulte en particulier que $\operatorname{vol}(L) = \operatorname{vol}(c_1(L))$ ne dépend que de la classe d'équivalence numerique $c_1(L) \in N^1(X)$. On peut étendre vol à tout le cône gros de $N^1(X)$, par exemple en utilisant (1.2) comme définition. L'inégalité de Khovanskii-Teissier montre alors immédiatement que $\mathrm{vol}^{1/n}$ est concave, donc en particulier continue, sur le cône gros. On démontre par ailleurs que vol tend vers 0 au bord du cône gros, et il est alors licite de l'étendre par continuité à tout $N^1(X)$ en posant $\mathrm{vol}(\alpha) = 0$ lorsque la classe $\alpha \in N^1(X)$ n'est pas grosse.

1.1.2. Classes de cycles sur l'espace de Riemann-Zariski et intersection positives. J'avais introduit dans ma thèse la notion d'*intersection positive* de n classes grosses $\alpha_1, ..., \alpha_n \in N^1(X)$, dont la définition, que j'avais formulée analytiquement, revient en termes algébriques à poser

$$\langle \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n \rangle := \sup_{\pi^*\alpha_j = A_j + E_j} (A_1 \cdot ... A_n)$$

où $\pi : X_\pi \to X$ parcourt comme plus haut les morphismes projectifs birationnels vers X et $\pi^*\alpha_j = A_j + E_j$ les décompositions de Kodaira de $\pi^*\alpha_j$ sur X_π. On voit alors que le théorème de Fujita peut se réexprimer comme l'égalité

$$\mathrm{vol}(\alpha) = \langle \alpha^n \rangle$$

pour toute classe grosse $\alpha \in N^1(X)$.

Cette construction fut généralisée à un nombre quelconque de classes grosses $\alpha_1, ..., \alpha_p$, $1 \le p \le n$, dans [**BDPP04**] en utilisant des propriétés de compacité faible des courants positifs, et l'un des objectifs de [**BFJ09**] a été de donner une version purement algébrique de la construction des intersections positives.

On commence par introduire l'*espace de Riemann-Zariski* $\mathfrak{X}$ associé à X, défini par

$$\mathfrak{X} = \varprojlim_\pi X_\pi$$

où $\pi : X_\pi \to X$ parcourt l'ensemble des morphismes birationnels vers X, qui constitue un système filtrant pour la relation de domination. On voit ici chaque X_π comme un schéma et la limite est prise dans la catégorie des espaces topologiques localement annelés.

Rappelons que pour toute variété projective Y, on définit l'espace des *classes numériques de* $\mathbb{R}$*-cycles de dimension* p sur Y comme le quotient $N_p(Y)$ de l'espace des $\mathbb{R}$-cycles Z de dimension p modulo ceux tel que $Z \cap P = 0$ pour tout polynôme P en les classes de Chern d'un fibré vectoriel sur Y (cf. [**Ful98**, p.374]). Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $N_p(Y)$ est de dimension finie, et N_p définit un foncteur covariant. On introduit dualement

$$N^p(Y) := N_p(Y)^*$$

et on appelle les éléments de $N^p(Y)$ *classes de cocycles de codimension* p. Lorsque Y est *lisse* le produit d'intersection fournit un isomorphisme naturel

$$N^p(Y) \simeq N_{\dim Y - p}(Y)$$

ainsi qu'une structure d'algèbre graduée sur $\bigoplus_{p \ge 0} N^p(Y)$. La formule de projection est de plus satisfaite pour un morphisme entre variétés lisses.

Il est maintenant naturel de définir par fonctorialité

$$N_p(\mathfrak{X}) := \varprojlim_\pi N_p(X_\pi)$$

et

$$N^p(\mathfrak{X}) := \varinjlim_\pi N^p(X_\pi),$$

chacun muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel topologique, et qui sont alors duaux l'un de l'autre. Puisque la famille de modèles lisse X_π est cofinale par

Hironaka, il est suffisant dans les deux cas de prendre la limite sur cette famille. On voit d'une part par la formule de projection qu'on dispose d'une injection continue

$$N^p(\mathfrak{X}) \subset N_{n-p}(\mathfrak{X}),$$

et d'autre part que $\bigoplus_{p\geq 0} N^p(\mathfrak{X})$ est muni d'un produit d'intersectbienvenu. ion qui en fait une algèbre graduée.

De façon plus concrète une classe de cycle $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$ de dimension p sur $\mathfrak{X}$ est la donnée d'une famille de classes numériques $\alpha_\pi \in N^p(X_\pi)$ pour tout π qui soit compatible par poussé en avant. Une classe de cocyle $\alpha \in N^p(\mathfrak{X})$ de codimension p sur $\mathfrak{X}$ est quant à elle déterminée par une classe $\alpha_\pi \in N^p(X_\pi) = N_{n-p}(X_\pi)$ sur un modèle *lisse* X_π de X, qui est ensuite tirée en arrière à tous les modèles lisses $X_{\pi'}$ qui le dominent.

Une classe $\alpha \in N_p(\mathfrak{X})$ est dit *pseudoeffective* (abrégé en *psef*) si pour chaque π α_π appartient au cône convexe fermé de $N_p(X_\pi)$ engendré par les classes de de cycles effectifs. Il est clair que l'ensemble des classes psef de $N_p(\mathfrak{X})$ est un cône convexe fermé, et une remarque simple mais cruciale pour la suite est qu'il est à base *compacte*. On note $\geq$ la relation d'ordre sur $N_p(\mathfrak{X})$ induite par le cône psef.

Le dual du cône psef de $N_1(\mathfrak{X})$ est constitué des classes *nef* $\alpha \in N^1(\mathfrak{X})$, i.e. les classes obtenues en tirant en arrière une classe nef $\alpha_\pi \in N^1(X_\pi)$ pour un certain π.

On démontre alors dans [**BFJ09**] le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soient $\alpha_1, ...\alpha_p \in N^1(X)$ des classes grosses, que l'on plonge dans $N^1(\mathfrak{X})$ par tiré en arière. Alors l'ensemble des classes de $N^p(\mathfrak{X})$ de la forme $\beta_1 \cdot ... \cdot \beta_p$ avec $\beta_j \in N^1(\mathfrak{X})$ nef et $\alpha_j \geq \beta_j$ (dans $N_{n-1}(\mathfrak{X})$, donc au sens où $\alpha_j - \beta_j$ est psef) admet une borne supérieure dans $N_{n-p}(\mathfrak{X})$ (toujours pour l'ordre $\geq$ induit par le cône psef).*

On note alors $\langle \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \rangle \in N_{n-p}(\mathfrak{X})$ la borne supérieure en question, que l'on appelle *classe d'intersection positive des α_j*. L'incarnation sur X de cette classe d'intersection positive satisfait donc, en accord avec le théorème de Fujita,

$$\langle \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \rangle_X = \sup_{\pi^*\alpha_j = A_j + E_j} \pi_*(A_1 \cdot ... \cdot A_p)$$

où $\pi : X_\pi \to X$ parcourt toutes les morphimes birationnels, $\pi^*\alpha_j = A_j + E_j$ les décompositions de Kodaira et le supremum est consideré dans $N_{n-p}(X)$ muni de l'ordre induit par le cône psef.

Il est important de noter que le produit d'intersection

$$(\alpha_1, ..., \alpha_p) \mapsto \langle \alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_p \rangle$$

n'est pas additif en ses variables, mais seulement super-additif. On démontre aisément qu'il dépend continûment du p-uplet de classes grosses.

1.1.3. Différentiabilité du volume. Le résultat principal de [**BFJ09**] est le résultat de différentiabilité suivant :

THÉORÈME 1.2. *La fonction volume* vol : $N^1(X) \to \mathbb{R}$ *est de classe C^1 sur le cône gros de $N^1(X)$, et ses dérivées directionnelles sont données par*

$$\frac{d}{dt}_{t=0} \mathrm{vol}(\alpha + t\beta) = n\langle \alpha^{n-1} \rangle_X \cdot \beta.$$

Ce résultat a pour conséquence immédiate la *relation d'othogonalité*

$$\langle \alpha^n \rangle_X = \alpha \cdot \langle \alpha^{n-1} \rangle_X,$$

laquelle était le principal point technique de la caractérisation du dual du cône psef dans [**BDPP04**]. La démonstration du théorème 1.2 repose en fait sur le même type d'arguments que la preuve de la relation d'orthogonalité donnée dans [**BDPP04**], et le point clé en est l'*inégalité de Morse holomorphe*

$$\mathrm{vol}(A-B) \geq (A^n) - n(A^{n-1}\cdot B),$$

valable pour tous fibrés amples A, B, et donc aussi nef par passage à la limite. Cette inégalité, due initialement à Siu et Demailly, admet une preuve très simple via un argument de comptage de dimension.

L'idée de la preuve du théorème 1.2 est la suivante. Fixons une classe nef B tel que $\beta + B$ soit nef. Pour toute classe nef $\gamma \in N^1(\mathfrak{X})$ tel que $\alpha - \gamma$ soit psef on écrit $\gamma + t\beta = A_t - tB$ avec $A_t = \gamma + t(\beta + B)$ nef, de sorte que

$$\mathrm{vol}(\alpha + t\beta) \geq \mathrm{vol}(\gamma + t\beta) \geq (A_t^n) - n(A_t^{n-1}\cdot tB)$$

$$= (A_t - tB)^n + O(t^2) = (\gamma + t\beta)^n + O(t^2) = (\gamma^n) + n\beta\cdot(\gamma^{n-1}) + O(t^2)$$

par l'inégalité de Morse holomorphe. En prenant la limite sur toutes les classes γ comme ci-dessus on en déduit alors

$$\mathrm{vol}(\alpha + t\beta) \geq \mathrm{vol}(\alpha) + n\beta\cdot\langle\alpha^{n-1}\rangle + O(t^2), \tag{1.3}$$

par le théorème de Fujita, à condition de s'assurer que la constante dans le O peut bien être choisie uniformément par rapport à γ, ce qui est fait dans [**BFJ09**]. Grâce à la continuité de $\alpha \mapsto \langle\alpha^{n-1}\rangle$ le théorème en découle aisément de (1.3) en intervertissant les rôles de α et $\alpha + t\beta$.

1.1.4. Inégalité de Diskant. L'inégalité de Khovanskii-Teissier énonce que pour toutes classes nef $\alpha_1, ..., \alpha_n \in N^1(X)$ on a

$$(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n) \geq (\alpha_1)^{1/n} ... (\alpha_n)^{1/n}.$$

Lorsque X est une variété torique chaque $\alpha_i \in N^1(X)$ correspond à un polytope P_i (défini à translation près) et $(\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_n)/n!$ calcule le *volume mixte* des P_i. L'inégalité de Khovanskii-Teissier devient dans ce cadre l'inégalité d'Aleksandrov-Frenchel pour les volumes mixtes, qui généralise l'inégalité isopérimétrique classique, laquelle revient essentiellement à

$$(\alpha^{n-1}\cdot\beta) \geq (\alpha^n)^{\frac{n-1}{n}}(\beta^n)^{\frac{1}{n}}.$$

L'inégalité de Diskant [**Disk73**] est une inégalité de géométrie convexe qui renforce l'inégalité isopérimétrique et caractérise en particulier le cas d'égalité. Sa démonstration passe par un résultat de différentiabilité du volume de corps convexes parallèles due à Aleksandrov [**Ale38**], dont notre théorème de différentiabilité constitue une généralisation à une variété projective quelconque. En suivant l'argument original de Diskant nous aboutissons donc au résultat suivant, qui répond en particulier à un problème posé par Teissier [**Tei82**].

Théorème 1.3. *Soit $\alpha, \beta \in N^1(X)$ deux classes nef et grosses et soit s le plus grand réel tel que $\alpha - s\beta$ soit psef. Alors on a*

$$(\alpha^{n-1}\cdot\beta)^{\frac{n}{n-1}} - (\alpha^n)(\beta^n)^{\frac{1}{n-1}} \geq \left((\alpha^{n-1}\cdot\beta)^{\frac{1}{n-1}} - s(\beta^n)^{\frac{1}{n-1}}\right)^n.$$

Corollaire 1.4. *Avec α, β comme ci-dessus on a l'égalité*

$$(\alpha^{n-1}\cdot\beta) = (\alpha^n)^{\frac{n-1}{n}}(\beta^n)^{\frac{1}{n}}$$

ssi α et β sont proportionnelles.

1.2. Croissance du degré des applications rationnelles

Dans l'article [**BFJ08a**] nous nous intéressons à un autre type de problème asymptotique en géométrie algébrique, issu cette fois-ci des systèmes dynamiques.

Considérons une application rationnelle dominante $F : X \dashrightarrow X$ d'une variété projective lisse X dans elle-même. La problématique générale est de décrire le comportement asymptotique de l'action de F^k sur la cohomologie de X lorsque $k \to \infty$, la difficulté étant que la relation $(F^k)^* = (F^*)^k$ n'est en général pas valable en cohomologie pour une application rationnelle F (le tiré en arrière étant défini via le graphe, i.e. en considérant l'application rationnelle comme une correspondance).

Le comportement asymptotique de $(F^k)^*$ sur $H^{p,p}(X)$ est gouverné par le *p-ème degré dynamique* de F, défini par bienvenu.

$$\lambda_p(F) := \lim_{k\to\infty} ((F^k)^*\omega^p \cdot \omega^{n-p})^{1/k}$$

où ω est une classe kählérienne. On démontre en effet que la limite en question existe par un argument de sous-multiplicativité et il est facile de voir qu'elle ne dépend pas du choix de ω. Notons que $\lambda_0(F) = 1$, tandis que $\lambda_{\dim X}(F)$ coïncide avec le degré topologique de F, i.e. le nombre d'antécédents d'un point général. On démontre également à partir des inégalites de Khovanskii-Teissier que la suite des $\lambda_p(F)$ est logarithmiquement concave. Dans le cas où $\dim X = 2$ on a donc toujours $\lambda_1(F)^2 \geq \lambda_2(F)$. Le résultat principal de [**BFJ08a**] est le suivant :

THÉORÈME 1.5. *Soit $F : X \dashrightarrow X$ une application rationnelle dominante d'une surface projective dans elle-même et supposons que la condition de non-résonance $\lambda_1(F)^2 > \lambda_2(F)$ ait lieu. Il existe alors une classe $\alpha_0 \in N^1(X)$ telle que pour toute classe $\alpha \in N^1(X)$ il existe $c(\alpha)$ telle que*

$$(F^k)^*\alpha = c(\alpha)\lambda_1(F)^k\alpha_0 + O(\lambda_2^{k/2}).$$

L'idée clé de la démonstration de ce résultat est d'introduire à nouveau l'espace de Riemann-Zariski. On dispose en effet d'un action *fonctorielle* de l'application rationnelle F sur $N^p(\mathfrak{X})$ par tiré en arrière, et sur le dual $N_p(\mathfrak{X})$ par poussé en avant (F induit en effet un *morphisme* sur $\mathfrak{X}$). Comme X est de dimension 2 le produit d'intersection définit une forme quadratique sur $N^1(\mathfrak{X})$, de signature Minkowski par le théorème d'indice de Hodge. On peut donc considérer le complété de $N^1(\mathfrak{X})$ pour la forme d'intersection, que l'on note $L^2(\mathfrak{X})$ et qui est muni d'une structure d'espace de Hilbert à signature Minkowski. On a des inclusions naturelles

$$N^1(\mathfrak{X}) \subset L^2(\mathfrak{X}) \subset N_1(\mathfrak{X}) = N^1(\mathfrak{X})^*.$$

On démontre de plus que $L^2(\mathfrak{X})$ est stable par F^* et F_*, qui sont adjoints l'un de l'autre.

Pour chaque modèle lisse X_π un argument de point fixe sur le cône nef de $N^1(X_\pi)$ montre l'existence d'une classe nef $\theta(\pi) \in N^1(\mathfrak{X})$ déterminée sur X_π et normalisée par $(\theta(\pi)^2) = 1$ telle que $F^*\theta(\pi) = \rho_\pi\theta(\pi)$ *dans* $N^1(X_\pi)$, ρ_π désignant le rayon spectral de l'action de F^* sur $N^1(X_\pi)$. Un argument de compacité montre alors l'existence d'une valeur d'adhérence $\theta \in N_1(\mathfrak{X})$ non-nulle des $\theta(\pi)$ telle que

$$F^*\theta = \lambda_1(F)\theta.$$

Le fait que $(\theta(\pi)^2) = 1$ garantit que $\theta \in L^2(\mathfrak{X})$. On montre de même l'existence d'une classe $\theta' \in L^2(\mathfrak{X})$ avec $(\theta'^2) = 1$ telle que

$$F_*\theta' = \lambda_1(F)\theta'.$$

On introduit alors l'operateur $T := \lambda_1(F)^{-1}F^*$ sur l'espace de Hilbert à signature Minkowski $H := L^2(\mathfrak{X})$, de sorte que l'on a

$$(T\alpha, T\beta) = \mu(\alpha, \beta) \tag{1.4}$$

pour tout $\alpha, \beta \in H$, avec $\mu := \lambda_2(F)/\lambda_1(F)^2 < 1$ (alors que T serait une isométrie dans le cas résonnant). En utilisant $T\theta = \theta$ et $T^*\theta' = \theta'$, des arguments élémentaires montrent que

$$T^k\alpha = c(\alpha)\theta + O(\mu^{k/2})$$

pour tout $\alpha \in L^2(\mathfrak{X})$, ce qui implique en particulier le théorème 1.5.

CHAPITRE 2

Théorie du pluripotentiel

Cette partie présente des travaux réalisés en collaboration avec Robert Berman, Vincent Guedj et Ahmed Zeriahi, tirés de [**BB08, BBGZ09**].

2.1. Petit historique

2.1.1. Le cas d'une variable complexe. Nous utiliserons [**ST97**] comme référence pour cette brève présentation. Considérons un compact K du plan complexe. Le k-*diamètre* de K est classiquement défini par

$$d_k(K) := \sup_{z_0,\dots,z_k \in K} \left(\prod_{i<j} |z_i - z_j| \right)^{1/k(k+1)}.$$

La définition usuelle est en fait le carré de cette expression, mais la présente normalisation sera plus commode pour la suite. On dit qu'une configuration de points $P = (z_0, ..., z_k) \in K^{k+1}$ est *de Fekete* si elle réalise le supremum en question. En termes physiques une telle configuration minimise l'énergie logarithmique

$$I_k(P) := \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i<j} \log |z_i - z_j|^{-1}$$

définie pour toute configuration P de $k+1$ charges identiques se mouvant librement sur le condensateur K. Les configurations de Fekete jouissent en outre de propriétés remarquables pour l'interpolation polynomiale, ceci résultant du fait que la norme sup sur K de chacun des polynômes de Lagrange

$$l_{P,i}(w) := \frac{\prod_{j \neq i}(w - z_j)}{\prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}$$

associés à P est égale à 1 si P est de Fekete.

Lorsque le nombre de points tend vers l'infini, un résultat classique de théorie du potentiel affirme que la suite des k-diamètres $d_k(K)$ admet une limite $d_\infty(K)$, le *diamètre transfini* de K. On montre de plus que $d_\infty(K)$ coïncide avec la *capacité logarithmique* de K, définie par

$$-\log \operatorname{Cap}(K) = \inf_\mu I(\mu),$$

où μ parcourt les mesures de probabilité sur K et

$$I(\mu) := \tfrac{1}{2} \int_{K \times K} \log |z - w|^{-1} d\mu(z) d\mu(w) \in]-\infty, +\infty]$$

est l'*énergie logarithmique* de μ. De façon équivalente et peut-être plus parlante, cet énoncé affirme donc que le minimum de l'énergie logarithmique « discrète »converge vers le mimum de l'énergie logarithmique « continue »lorsque le nombre de points tend vers l'infini, i.e.

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{P \in K^{k+1}} I_k(P) = \inf_\mu I(\mu).$$

Si K est non-polaire, i.e. si $\operatorname{Cap}(K) > 0$, on montre qu'il existe une *unique* mesure de probabilité μ_K portée par K et minimisant I. On appelle μ_K la *mesure d'équilibre* de K, et on peut en effet la penser comme la distribution continue de charges sur le condensateur K qu'on obtient à l'équilibre. Le *potentiel d'équilibre* u_K de K, défini comme l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions sous-harmoniques u du plan à croissance au plus logarithmique et telles que $u \leq 0$ sur K, satisfait

$$dd^c u_K^* = \mu_K,$$

où l'on normalise d^c de sorte que

$$dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} = \frac{1}{4\pi}\Delta.$$

Les configurations de Fekete $P_k \in K^{k+1}$, qui sont les minimisateurs de l'energie discrète I_k, ne sont en revanche pas uniques en général. Mais un résultat classique affirme que *toute* suite $P_k \in K^{k+1}$ de configurations de Fekete s'équidistribue nécessairement selon la mesure d'équilibre lorsque $k \to \infty$, i.e. on a la convergence faible de mesures

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{P_k} = \mu_K$$

où on pose $\delta_P := \frac{1}{k+1}\sum_i \delta_{z_i}$ pour $P = (z_0, ..., z_k)$.

Une version « pondérée »de cette théorie classique a été l'objet de recherches plus récentes. On introduit dans cette situation un potentiel extérieur φ, i.e. une fonction continue sur K, et l'on s'intéresse maintenant à l'énergie totale

$$I_k(z_0, ..., z_k) + \frac{1}{k+1}\left(\varphi(z_0) + ... + \varphi(z_k)\right)$$

et à sa « version continue »$I(\mu) + \langle\varphi, \mu\rangle$. Les résultats précédents s'étendent à ce cadre, i.e. il existe une unique mesure d'équilibre $\mu_{(K,\varphi)}$ minimisant l'énergie totale parmi les mesures de probabilités de K, et toute suite $P_k \in K^{k+1}$ de minimisateurs de l'énergie totale discrète s'équidistribue selon $\mu_{(K,\varphi)}$.

2.1.2. La dimension supérieure. Une généralisation de la notion de points de Fekete et de diamètre transfini dans $\mathbb{C}^n$ a été proposée dans les années 50 par Leja, motivé par des questions d'interpolation. On observe d'abord qu'en une variable complexe $\prod_{i<j}(z_i - z_j)$ coïncide au signe près avec le déterminant de Vandermonde $V_k(z_0, ..., z_k) = \det(z_i^j)$. En dimension supérieure on définit celui-ci par

$$V_k(z_0, ..., z_{N_k}) := \det(s_i(z_j))$$

où $s_1, ..., s_{N_k}$ décrit les monômes de degré au plus k dans un ordre donné et $N_k = \binom{n+k}{k}$ est donc la dimension de l'espace de l'espace des polynômes de degré au plus k. On note que V_k est bien défini au signe près ; en suivant Leja on définit alors le k-diamètre d'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ par

$$d_k(K) := \sup_{K^{N_k}} |V_k|^{1/kN_k}.$$

Cette normalisation, plus commode pour la suite, diffère elle aussi de la définition habituelle d'un exposant 2. Une configuration de Fekete $P \in K^{N_k}$ est par définition un maximiseur de $|V_k|$ sur K^{N_k}. Les polynômes d'interpolation de Lagrange étant donnés en toute dimension par

$$l_{P,i}(z) = \frac{V_k(z_1, ..., z_{i-i}, z, z_{i+1}, ..., z_{N_k})}{V_k(z_1, ..., z_{N_k})}$$

il reste vrai que $\sup_K |l_{P,i}| = 1$.

L'existence du diamètre transfini $d_\infty(K) = \lim_{k\to\infty} d_k(K)$ fut démontrée plus tard par Zaharjuta [**Zah75**], et par Bloom-Levenberg [**BL10a**] dans le cas pondéré. Le potentiel d'équilibre u_K d'un compact non-pluripolaire K a été défini par Siciak comme l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions psh u sur $\mathbb{C}^n$ à croissance au plus logarithmique et telles que $u \leq 0$. Bedford et Taylor ont alors pu introduire la mesure d'équilibre de K comme $\mu_K := (dd^c u_K^*)^n$, puisque u_K^* est une fonction psh localement bornée sur $\mathbb{C}^n$, mesure dont ils ont montré qu'elle définissait bien portée par K et de masse 1.

Cependant une généralisation de l'énergie logarithmique d'une mesure et une caractérisation variationnelle de la mesure d'équilibre restaient toutes deux manquantes. Une conjecture standard du domaine prévoyait par ailleurs que les configurations de Fekete s'équidistribuent selon la mesure d'équilibre en toute dimension. Les travaux qu'on va décrire ci-dessous résolvent en particulier ces deux problèmes.

2.2. Diamètre transfini : le cadre géométrique

2.2.1. Le cadre géométrique. On considère une variété complexe compacte X munie d'un fibré en droites L, qu'on supposera ample pour simplifier. On notera $V := (L^n)$ son volume.

On appelle *compact pondéré* de X une paire (K, ϕ) où $K \subset X$ est un compact et ϕ est un *poids* continu sur L, i.e. une métrique hermitienne continue $e^{-\phi}$ sur L, notée additivement (ou, si l'on préfère, une fonction continue log-homogène sur l'espace total de L^* privé de sa section nulle). Seule la restriction de ϕ à K joue en fait un rôle dans ce qui suit. La norme $L^\infty(K, k\phi)$ induite sur kL est définie par

$$\|s\|_{L^\infty(K,k\phi)} := \sup_K |s|e^{-k\phi}$$

pour $s \in H^0(kL)$, et c'est en effet une norme si K est Zariski-dense, donc *a fortiori* si K est non-pluripolaire. De façon similaire une *mesure pondérée* est une paire (μ, ϕ) où μ est une mesure de probabilité borélienne sur X est ϕ est un poids continu sur L, et la norme $L^2(\mu, k\phi)$ sur $H^0(k\phi)$ est définie par

$$\|s\|^2_{L^2(\mu,k\phi)} := \int |s|^2 e^{-2k\phi} d\mu;$$

qui est bien une norme dès que $\operatorname{supp}\mu$ est Zariski-dense, donc en particulier si μ est *non-pluripolaire* au sens où elle ne charge pas les pluripolaires.

Étant donnée une mesure pondérée (μ_0, ϕ_0) non-pluripolaires on définit les déterminants de Vandermonde relatifs à (μ_0, ϕ_0) de la façon suivante : pour chaque $k \gg 1$ on note N_k la dimension de $H^0(kL)$ et on en choisit une base orthonormée $s_1^{(k)}, ..., s_{N_k}^{(k)}$ pour le produit scalaire $L^2(\mu_0, k\phi_0)$. On pose alors

$$V_k(z_1, ..., z_{N_k}) = \det(s_i^{(k)}(z_j))_{1\le i,j\le N_k}$$

ce qui définit une section $V_k \in H^0(X^{N_k}, (kL)^{\boxtimes N_k})$, qui ne dépend du choix de la base orthonormée qu'à une constante de module 1 près - ambiguité que nous ignorerons dans la suite puisque seul $|V_k|$ interviendra. On observe en outre que remplacer (μ_0, ϕ_0) par une autre paire (μ_0', ϕ_0') a pour seul effet de multiplier V_k par une constante non-nulle.

Le cas de $\mathbb{C}^n$ s'inscrit dans ce contexte plus géométrique de la façon suivante : partant d'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ muni d'une fonction continue φ on pose $X = \mathbb{P}^n$ et $L = \mathcal{O}(1)$, et l'on obtient un compact pondéré (K, ϕ) en prenant pour ϕ une extension continue de $(\log|Z_0| + \varphi)|_K$, où $Z_0 \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ est l'équation du diviseur à l'infini $\mathbb{P}^n - \mathbb{C}^n$. Dans le cadre géométrique, le cas « non-pondéré », pour lequel $\varphi = 0$, ne joue donc plus de rôle particulier, puisque tout compact doit être accompagné d'une métrique, donc être « pondéré ». Les monômes de degré au plus k que l'on a considérés précédemment forment une base orthonormée de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ pour le produit scalaire $L^2(\mu_0, k\phi_0)$ avec μ_0 la mesure de Haar du tore compact unité $T \subset (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ et ϕ_0 une extension continue de $(\log|Z_0|)|_T$ sur $\mathcal{O}(1)$.

Revenons au cas général et donnons-nous une mesure pondérée (μ, ϕ_0), et les déterminants de Vandermonde V_k associés. Le *k-diamètre d'un compact pondéré* (K, ϕ) *relativement à* (μ_0, ϕ_0) est défini par

$$d_k(K,\phi) := \|V_k\|_{L^\infty(K,k\phi)}^{\frac{1}{kN_k}} = \sup_{z_1,\dots,z_{N_k}\in K} |V_k(z_1,\dots,z_{N_k})|_{k\phi}^{\frac{1}{kN_k}} e^{-\frac{1}{N_k}\left(\phi(z_1)+\dots+\phi(z_{N_k})\right)},$$

et on dit que $P \in K^{N_k}$ est une *configuration de Fekete de* $(K, k\phi)$ si elle réalise le supremum. Cette dernière notion est en fait indépendente du choix de (μ_0, ϕ_0) puisque V_k ne dépend de (μ_0, ϕ_0) qu'à une constante près.

Pour finir, le *potentiel d'équilibre* ϕ_K de (K, ϕ) est défini comme l'enveloppe supérieure de la famille de tous les poids psh ψ sur L tels que $\psi \le \phi$ sur K. Si K est non-pluripolaire $P_K\phi := \phi_K^*$ est un poids psh localement borné et on définit la *mesure d'équilibre* de (K, ϕ) par

$$\mu_{(K,\phi)} := V^{-1}(dd^c P_K\phi)^n$$

définie au sens de Bedford-Taylor, le facteur V^{-1} garantissant qu'elle est de masse 1. On montre comme dans le cas de $\mathbb{C}^n$ que $\mu_{(K,\phi)}$ est portée par K.

2.2.2. Mesures de Bernstein-Markov et diamètre transfini. Soit (K, ϕ) un compact pondéré sur X. Étendant la terminologie classique on dira qu'une mesure de probabilité μ sur K *est de Bernstein-Markov par rapport à* (K, ϕ) (BM pour faire court) si la distorsion entre les normes $L^\infty(K, k\phi)$ et $L^2(\mu, k\phi)$ sur $H^0(kL)$ est à croissance sous-exponentielle. La propriété de BM énonce donc que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C(\varepsilon) > 0$ tq

$$\|s\|_{L^2(\mu,k\phi)} \le \|s\|_{L^\infty(K,k\phi)} \le Ce^{\varepsilon k}\|s\|_{L^2(\mu,k\phi)}$$

pour tout $k \gg 1$ et tout $s \in H^0(kL)$.

Si l'on prend $K = X$ alors il résulte facilement de l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction psh $|s|$ que toute mesure de probabilité μ dominant la mesure de Lebesgue est de BM par rapport à (X, ϕ) pour tout poids (continu) ϕ. Dans le cas de $\mathbb{C}^n$ un résultat de Nguyen-Zeriahi [**NZ83**] démontre que la mesure de Haar μ_T sur le tore compact unité T est de BM par rapport à $(T, \log|Z_0|)$.

L'un des résultats principaux de [**BB08**] s'énonce comme suit :

THÉORÈME 2.1. *Soit* (μ_0, ϕ_0) *une mesure pondérée telle que* μ_0 *soit de BM par rapport à* (K_0, ϕ_0) *pour un compact* K_0 *donné. Alors pour tout compact pondéré non-pluripolaire* (K, ϕ) *le diamètre transfini*

$$d_\infty(K,\phi) = \lim_{k\to\infty} d_k(K,\phi)$$

de (K, ϕ) *relativement à* (μ_0, ϕ_0) *existe et satisfait*

$$-\log d_\infty(K,\phi) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} V^{-1}\int_X (P_K\phi - P_{K_0}\phi_0)(dd^c P_K\phi)^j \wedge (dd^c P_{K_0}\phi_0)^{n-j}.$$

Le membre de droite, d'apparence compliquée, fait en réalité intervenir une fonctionnelle bien connue en géométrie kählérienne et qui, comme nous allons le voir, est un sens précis la *primitive* de l'opérateur de Monge-Ampère.

Dans le cas de $\mathbb{C}^n$ non-pondéré le résultat avait été obtenu auparavant par sous une forme proche Rumely [**Rum07**] comme cas particulier des résultats généraux de [**CLR03**], et sous la présente forme dans [**DMR06**]. Dans le cas de $\mathbb{C}^n$ pondéré le résultat a été obtenu par Bloom-Levenberg [**BL10a**] comme conséquence de [**Rum07**].

2.3. Énergie de Monge-Ampère et diamètre transfini

2.3.1. Énergie de Monge-Ampère. En considérant pour l'instant des poids lisses ϕ sur L on définit l'*opérateur de Monge-Ampère* par $\mathrm{MA}\,(\phi) := V^{-1}(dd^c\phi)^n$, dont l'intégrale sur X vaut 1. L'espace des poids lisses ϕ est affine, d'espace tangent $C^\infty(X)$, et l'intégration contre $\mathrm{MA}\,(\phi)$ induit donc une 1-forme sur l'espace des poids. La formule d'intégration par partie

$$\int_X v dd^c u \wedge (dd^c\phi)^{n-1} = \int_X u dd^c v \wedge (dd^c\phi)^{n-1}$$

pour toutes $u, v \in C^\infty(X)$ dit que cette 1-forme de Monge-Ampère est fermée, donc exacte, et on appellera *énergie de Monge-Ampère* sa primitive. Il s'agit donc d'une fonctionnelle E sur l'espace des poids, bien définie à une constante additive près et caractérisée par la relation

$$\frac{d}{dt}_{t=0} E(\phi + tu) = \int_X u \mathrm{MA}\,(\phi) \tag{2.1}$$

pour tout poids ϕ et toute fonction u. Une intégration le long d'un segment $[\phi, \psi]$ fournit la formule explicite

$$E(\phi) - E(\psi) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0} V^{-1} \int_X (\phi - \psi)(dd^c\phi)^j \wedge (dd^c\psi)^{n-j}.$$

On observera la relation d'équivariance $E(\phi + c) = E(\phi) + c$ pour $c \in \mathbb{R}$, qui reflète le fait que $\mathrm{MA}\,(\phi + c) = \mathrm{MA}\,(\phi)$ est de masse 1. Lorsque l'on se restreint à des poids ϕ (lisses et) psh, l'énergie de Monge-Ampère E jouit des propriétés remarquables suivantes : elle est *croissante*, i.e. $\phi \le \psi \Longrightarrow E(\phi) \le E(\psi)$, ce qui résulte du fait que $E'(\phi) = \mathrm{MA}\,(\phi)$ est positive. Elle est aussi *concave*, ce qui se démontre en calculant

$$E''(\phi)(u, u) = -nV^{-1} \int_X du \wedge d^c u \wedge (dd^c\phi)^{n-1},$$

qui est négatif si ϕ est psh.

L'expression définissant E fait encore sens lorsque ϕ et ψ sont psh localement bornées par Bedford-Taylor et les propriétés précédentes, qui reposent *in fine* sur l'intégration par parties, restent valables dans ce cadre.

2.3.2. Preuve du théorème 2.1. La conclusion de ce théorème peut se réénoncer comme

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{kN_k} \log \|V_k\|_{L^\infty(K, k\phi)} = E(P_K\phi) - E(P_{K_0}\phi_0).$$

Supposons d'abord que l'on ait démontré l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{kN_k} \log \|V_k\|_{L^\infty(K, k\phi)} = E(P_K\phi) + c. \tag{2.2}$$

pour tout compact pondéré (K, ϕ). On a alors nécessairment $c = -E(P_{K_0}\phi)$ si l'on montre que

$$\log \|V_k\|_{L^\infty(K_0, k\phi_0)} = o(kN_k). \tag{2.3}$$

Or μ_0 est de BM par rapport à (K_0, ϕ_0) par hypothèse, ce qui implique facilement que

$$\log \frac{\|V_k\|_{L^\infty(K_0, k\phi_0)}}{\|V_k\|_{L^2(\mu_0, k\phi_0)}} = o(kN_k)$$

comme on le voit en appliquant l'inégalité de BM à chaque variable de V_k successivement. D'un autre côté un argument algébrique élémentaire montre que la norme au carré de l'opérateur naturel

$$\bigwedge^{N_k} H^0(kL) \to \bigotimes^{N_k} H^0(kL) \to H^0(X^{N_k}, (kL)^{\boxtimes N_k})$$

vaut $N_k!$. Cet opérateur envoie par définition $s_1^{(k)} \wedge ... \wedge s_{N_k}^{(k)}$ sur le déterminant de Vandermonde V_k (avec $(s_j^{(k)})_j$ la base $L^2(\mu_0, k\phi_0)$-orthonormée de $H^0(kL)$ qu'on a choisie), et il en résulte que

$$\|V_k\|^2_{L^2(\mu_0,k\phi_0)} = N_k!$$

ce qui implique (2.3) puisque $\log N_k! = O(N_k \log N_k) = o(kN_k)$.

Afin de démontrer (2.2) on commence par se ramener au cas où $K = X$ et ϕ est lisse et strictement psh. Pour ce faire on observe que la définition du poids d'équilibre implique immédiatement le *principe du maximum tautologique* suivant :

$$\|s\|_{L^\infty(K,k\phi)} = \|s\|_{L^\infty(X,k\phi_K)}$$

pour toute section $s \in H^0(kL)$ (en prenant garde qu'ici ϕ_K n'est pas continu en général). En appliquant ceci à chaque variable de V_k successivement on obtient donc

$$\|V_k\|_{L^\infty(K,k\phi)} = \|V_k\|_{L^\infty(X,k\phi_K)}.$$

Notons par ailleurs que $-\log \|V_k\|_{L^\infty(X,k\tau)}$ est clairement croissante en τ. On a vu de même que E était croissante, et elle est aussi continue le long des suites monotones par les résultats classiques de Bedford-Taylor. Comme L est ample on peut approcher ϕ_K (resp. $\phi_K^* = P_K\phi$) par en dessous (resp. par au dessus) par des fonctions strictement psh lisses, et on se ramène donc effectivement au cas où $K = X$ et ϕ est lisse strictement psh.

Si on se donne une mesure de Lebesgue λ sur X de masse 1 alors λ est bien sûr de BM pour (X, ϕ), et on en déduit comme ci-dessus que

$$\log \frac{\|V_k\|_{L^\infty(X,k\phi)}}{\|V_k\|_{L^2(\lambda,k\phi)}} = o(kN_k)$$

Étant donne que E est par définition une primitive de la 1-forme de Monge-Ampère on termine maintenant la démonstration en montrant que la différentielle de

$$F_k(\phi) := \frac{1}{kN_k} \log \|V_k\|_{L^2(\lambda,k\phi)}$$

en un poids lisse strictement psh ϕ converge vers MA (ϕ). Mais un raisonnement élémentaire montre que

$$\frac{d}{dt}_{t=0} F_k(\phi + tv) = \frac{1}{N_k} \int_X v\rho_k(\lambda, \phi)\lambda$$

où pour toute mesure μ et tout poids ϕ $\rho_k(\mu, \phi)$ désigne la *k-ème fonction de distorsion de Bergman*, définie par

$$\rho_k(\mu, \phi)(z) = \sup_{s \in H^0(kL)-\{0\}} \frac{|s(z)|^2_{k\phi}}{\|s\|^2_{L^2(\mu,k\phi)}},$$

la norme au carré de l'opérateur d'évaluation en z. Une version faible du célèbre résultat de Bouche-Catlin-Tian-Zelditch [**Bo90, Cat99, Tia90, Zel98**] sur l'existence d'un développement asymptotique de $\rho_k(\lambda, \phi)$ lorsque $k \to \infty$ pour un poids lisse strictement psh ϕ donne la convergence faible

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \rho_k(\lambda, \phi)\lambda = \mathrm{MA}\,(\phi),$$

et le résultat suit.

2.3.3. Une variante : croissance des boules unités. Si (K,ϕ) (resp. (μ,ϕ)) est un compact pondéré (resp. une mesure pondérée) nous noterons $\mathcal{B}^\infty(K,k\phi)\subset H^0(kL)$ (resp. $\mathcal{B}^2(\mu,k\phi)$) la boule unité de la norme $L^\infty(K,k\phi)$ (resp. $L^2(\mu,k\phi)$).

La variante suivante du théorème 2.1 est démontrée dans [**BB08**] :

THÉORÈME 2.2. *Pour tous compacts pondérés non-pluripolaires (K_1,ϕ_2), (K_2,ϕ_2) on a*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2kN_k}\log\frac{\operatorname{vol}\mathcal{B}^\infty(K_1,k\phi_1)}{\operatorname{vol}\mathcal{B}^\infty(K_2,k\phi_2)}=E\circ P_{K_1}(\phi_1)-E\circ P_{K_2}(\phi_2).$$

Dans cette énoncé vol désigne la mesure de Lebesgue sur $H^0(kL)$, dont la normalisation n'a pas besoin d'être précisée puisqu'on considère des rapports de volumes.

2.3.4. Différentiabilité de l'énergie à l'équilibre. On définit l'*énergie à l'équilibre* d'un compact pondéré (K,ϕ) par

$$E_{\mathrm{eq}}(K,\phi):=E\circ P_K(\phi),$$

où l'énergie E est normalisée par $E\circ P_{K_0}(\phi_0)=0$, de sorte que $E_{\mathrm{eq}}(K,\phi)=-\log d_\infty(K,\phi)$ par le théorème 2.1.

Le résultat de différentiabilité suivant est démontré dans [**BB08**]. Il est analogue au théorème 1.2 sur la différentiabilité du volume des diviseurs présenté auparavant et joue une rôle-clé dans plusieurs résultats à venir.

THÉORÈME 2.3. *Soit K un compact non-pluripolaire. Alors la fonction concave $\phi\mapsto E_{\mathrm{eq}}(K,\phi)$ est différentiable et ses dérivées directionnelles sont données par*

$$\frac{d}{dt}_{t=0}E_{\mathrm{eq}}(K,\phi+tv)=\int_X v\,\mu_{(K,\phi)}$$

pour toute fonction continue v.

En termes plus imagés ce résultat affirme que $(E\circ P_K)'=E'\circ P_K$. L'opérateur P_K, qui agit comme un opérateur de projection sur les fonctions psh continues, est trivialement concave et croissant, de sorte que $E\circ P_K$ est concave et admet donc des dérivées directionnelles $\frac{d}{dt}_{t=0_+}E\circ P_K(\phi+tv)$. On notera cependant que P_K n'est lui-même *pas* différentiable en général.

Comme on va maintenant le voir, le théorème 1.2 implique (et est en fait équivalent à) une caractérisation variationnelle de la mesure d'équilibre $\mu_{(K,\phi)}$. Commençons par fixer la convention suivante pour les *transformées de Legendre-Fenchel* :

DÉFINITION 2.4. Soit F une fonctionnelle *concave* définie sur l'ensemble des poids continus (resp. des poids continus psh) sur L. Si ψ_0 est un poids continu (resp. un poids continu psh) sur L on définit la *transformée de Legendre-Fenchel de F centrée en ψ_0* par

$$F^*(\mu):=\sup_\psi\left(F(\psi)-F(\psi_0)-\langle\psi-\psi_0,\mu\rangle\right)\in[0,+\infty]$$

pour toute $\mu\in C^0(X)^*$, où ψ parcourt les poids (resp. les poids psh) sur L.

Remarquons que F^* est nécessairement infinie en dehors des mesures positives si F est croissante, et en dehors des mesures de probabilité si elle est satisfait de plus la relation d'équivariance $F(\psi+c)=F(\psi)+c$ tout $c\in\mathbb{R}$ (ce qui est le cas de E et $E\circ P_K$). On démontre en utilisant le théorème de régularisation de Demailly [**Dem92**] le résultat suivant :

LEMME 2.5. *Pour tout compact K non-pluripolaire et tout poids psh continu ψ_0 les transformées de Legendre-Fenchel centrées en ψ_0 de E et $E_{\mathrm{eq}}(K,\cdot) = E \circ P_K$ coïncident sur l'ensemble $\mathcal{P}_K$ des mesures de probabilité de K.*

On appele E^* l'*énergie pluricomplexe* relative à ψ_0, qui généralise l'énergie logarithmique. On obtient alors une caractérisation variationnelle des mesures d'équilibres :

COROLLAIRE 2.6. *Soit ψ_0 un poids psh continu et E^* l'énergie pluricomplexe relative à ψ_0. Alors pour tout compact pondéré non-pluripolaire (K,ϕ) on a*

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}_K} \left(E^*(\mu) + \langle \phi - \psi_0, \mu \rangle\right) = E_{\mathrm{eq}}(K,\phi)$$

et l'infimum en question est réalisé exactement pour $\mu = \mu_{(K,\phi)}$.

Ce résultat se déduit aisément du théorème 2.3 *via* la théorie générale des fonctions convexes, qui montre même que les deux énoncés sont en fait *équivalents.*

On donne maintenant quelques éléments de la preuve du théorème 2.3. En utilisant le fait que $E'(P_K\phi) = \mu_{(K,\phi)}$, un argument élémentaire de convexité montre tout d'abord que

$$\frac{d}{dt}_{t=0_+} E \circ P_K(\phi + tv) = \frac{d}{dt}_{t=0_+} \int_X (P_K(\phi + tv) - P_K\phi)\mu_{(K,\phi)}.$$

Le point clé de la démonstration du théorème de différentiabilité est alors l'égalité $P_K\phi = \phi$ presque partout par rapport à la mesure d'équilibre $\mu_{(K,\phi)}$, ce qui revient à la *relation d'orthogonalité*

$$E'(P_K\phi) \cdot (\phi - P_K\phi) = 0,$$

qui garantit en particulier que $E'(P_K\phi)$ est bien dans le sur-différentiel en ϕ de la fonction concave $E \circ P_K$. En appliquant la relation d'othogonalité en ϕ et en $\phi + tv$ on se ramène facilement à démontrer

$$\lim_{t \to 0_+} \int_{\{P_K(\phi)+tv < P_K\phi + tv\}} \mu_{(K,\phi)} = 0,$$

ce qui s'obtient (avec un peu de travail) grâce au *principe de comparaison* que satisfait l'opérateur de Monge-Ampère.

2.3.5. Une interprétation probabiliste des résultats. Nous démontrons dans cette section que l'énergie pluricomplexe E^* sur les mesures peut être vue comme la limite au sens de la théorie des grandes déviations de fonctionnelles d'énergie discrètes sur les configurations de points. Les résultats présentés ici simplifient l'approche de [**Ber08**] et sont liés de près à ceux de [**BL10b**].

On fixe comme dans le théorème 2.1 une mesure pondérée (μ_0, ϕ_0) telle que μ_0 soit BM par rapport à (K_0, ϕ_0) pour un compact K_0 donné. On peut alors considérer les déterminants de Vandermonde V_k associés et on définit l'*énergie discrète*

$$I_k(P) := \frac{1}{kN_k} \log |V_k(P)|^{-1}_{k\phi_0}$$

d'une configuration P de N_k points de X. Cette définition est bien compatible avec la définition classique sur $\mathbb{C}$, en prenant pour $K_0 = T$ le cercle unité, μ_0 la mesure de Haar sur T et ϕ_0 une extension continue de $(\log |Z_0|)\,|_T$ en coordonnées homogènes $[Z_0 : Z_1]$ sur $\mathbb{P}^1$.

On se donne maintenant un compact non-pluripolaire K de X et une mesure de probabilité μ sur K qui soit de BM par rapport à (K,ϕ) pour *tout* poids continu ϕ (ce sera par exemple le cas, comme on l'a vu, si l'on prend $K = X$ et μ qui domine la mesure de Lebesgue). On considère (K,μ) comme un espace de probabilité pour lequel I_k définit une fonctionnelle d'énergie sur les configurations de N_k points, et on cherche à passer à la limite thermodynamique lorsque $k \to \infty$, i.e. lorsque le nombre N_k de points tend vers $+\infty$. On cherche en particulier à définir une fonctionnelle d'énergie I sur les « configurations continues »de points de K, i.e. sur l'espace $\mathcal{P}_K$ des mesures de probabilité de K, telle que I_k converge en un sens à préciser vers I, avec par exemple pour propriété désirable que les minima d'énergie convergent, i.e.

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{K^{N_k}} I_k = \inf_{\mathcal{P}_K} I.$$

Comme on l'a vu plus haut c'est en effet ce qui se produit en dimension 1 avec I l'énergie logarithmique, qui est clairement la limite des I_k en un sens intuitif.

Suivant le formalisme de Gibbs de la mécanique statistique on introduit pour chaque k la *mesure de Gibbs* associée

$$\gamma_k := Z_k^{-1} e^{-c_k I_k} \mu^{\otimes N_k}$$

sur K^{N_k}, où $c_k \to +\infty$ est une suite à déterminer qui va gouverner la vitesse de convergence du cas discret au cas continu et Z_k est un facteur de normalisation, appelé « fonction de partition », qui assure que γ_k est de masse 1. Le problème devient alors de décrire le comportement asymptotique des espaces de probabilité (K^{N_k}, γ_k) lorsque $k \to \infty$, ce qui s'exprime naturellement dans le cadre de la théorie des *grandes déviations*.

Rappelons en brièvement quelques aspects. On consultera [**DZ, Ell**] pour plus de détails. Considérons un espace topologique compact (pour simplifier) $\mathfrak{X}$ (qui sera $\mathcal{P}_K$ dans notre cas) et une suite de mesures de probabilité (boréliennes) ν_k sur $\mathfrak{X}$ (dans notre cas $\nu_k = (\delta_k)_* \gamma_k$ avec $\delta_k : K^{N_k} \to \mathcal{P}_K$ l'application naturelle définie plus haut). On dit alors que la suite ν_k satisfait un principe de grandes déviations à vitesse c_k pour une suite $c_k \to +\infty$ s'il existe une fonction sci $I : \mathfrak{X} \to [0, +\infty]$ telle que

$$\limsup_{k\to\infty} c_k^{-1} \log \nu_k(F) \le -\inf_F I$$

pour tout fermé F de $\mathfrak{X}$ et

$$\liminf_{k\to\infty} c_k^{-1} \log \nu_k(U) \ge -\inf_U I$$

pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$. La fonction I, donc on voit facilement qu'elle est uniquement déterminée par ces conditions, est appelée *fonction d'entropie*. On a nécessairement $\min_{\mathfrak{X}} I = 0$, et tout fermé F ne contenant pas de minimum de I satisfait $\nu_k(F) = O(e^{-\varepsilon c_k})$ pour un certain $\varepsilon > 0$, de sorte que les ν_k se concentrent c_k-exponentiellement vite vers les minima de I. Par un théorème de Varadhan on a alors l'équivalent

$$\log \int_{\mathfrak{X}} e^{c_k f} d\nu_k \sim c_k \sup_{\mathfrak{X}} (f - I)$$

pour toute fonction continue f sur $\mathfrak{X}$, ce qui pour des mesures de Gibbs comme ci-dessus s'écrit

$$\log \int_{K^{N_k}} \exp\left(c_k(f \circ \delta_k - I_k)\right) d\mu^{\otimes N_k} \sim c_k \sup_{\mathcal{P}_K} (f - I)$$

et exprime le fait que I_k tende vers I au sens des grandes déviations.

Si V est un espace vectoriel topologique et ν est une mesure positive sur V on définit sa *transformée de Laplace logarithmique* $\Lambda_\nu : V^* \to]-\infty, +\infty]$ par

$$\Lambda_\nu(w) := \log \int_V e^{\langle w, \cdot\rangle} d\nu,$$

qui est convexe par convexité de l'exponentielle. On dispose alors de la version générale suivante du théorème de Gärtner-Ellis (cf. [**DZ**, Corollary 4.6.14 p.167] et [**Ell**, Theorem II 6.3 p.231].

THÉORÈME 2.7. *Soit $\mathfrak{X}$ un compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe V et ν_k une suite de mesures de probabilité sur $\mathfrak{X}$. Supposons, pour une suite $c_k \to +\infty$ donnée, que la limite*

$$\Lambda(w) = \lim_{k\to\infty} c_k^{-1}\Lambda_{\nu_k}(c_k w)$$

existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V^*$. Pour $v_0 \in V$ donné les conditions suivantes sont alors équivalentes :

i) *Λ est Gâteaux différentiable en 0, de dérivée $L'(0) = v_0$.*

(ii) *La transformée de Legendre-Fenchel $\Lambda^* : V \to]-\infty, +\infty]$ de Λ atteint son minimum $\min_V \Lambda^* = 0$ exactement en v_0.*

(ii) *La suite ν_k se concentre c_k-exponentiellement vite en v_0 au sens où pour tout $w \in V^*$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\nu_k\{v \in V, \, |\langle v - v_0, w\rangle| \geq \varepsilon\} = O(e^{-\delta c_k}).$$

Quand ces conditions sont réalisées la suite ν_k satisfait un principe de grandes déviations à vitesse c_k, avec comme fonction d'entropie la transformée de Legendre-Fenchel Λ^* de Λ.

On notera que le théorème de Varadhan implique en tout état de cause que $\Lambda = \Lambda^{**}$ doit coïncider avec la transformée de Legendre-Fenchel de I si la suite ν_k satisfait un principe de grandes déviations d'entropie I.

On va maintenant combiner ce résultat général aux théorèmes 2.1 et 2.3 pour montrer le résultat probabiliste suivant, d'abord obtenu dans [**Ber08**] sans utiliser le théorème de Gärtner-Ellis.

THÉORÈME 2.8. *La suite des images dans $\mathcal{P}_K$ des mesures de Gibbs*

$$\gamma_k := Z_k^{-1} e^{-2kN_k I_k}\mu^{\otimes N_k} = \frac{|V_k|^2_{k\phi_0}\mu^{\otimes N_k}}{\|V_k\|^2_{L^2(\mu, k\phi_0)}}$$

satisfait un principe de grandes déviations à vitesse $2kN_k$ et se concentre $2kN_k$-exponentiellement vite en $\mu_{(K,\phi)}$. La fonctionnelle d'entropie $I : \mathcal{P}_K \to [0, +\infty]$ est donnée par la transformée de Legendre-Fenchel de $E_{\mathrm{eq}}(K, \cdot)$ centrée en ϕ_0.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que

$$Z_k = \int_{P \in K^{N_k}} e^{-2kN_k I_k(P)}\mu^{\otimes N_k}(dP) = \|V_k\|^2_{L^2(\mu, k\phi_0)}.$$

On pose maintenant $V := C^0(K)^*$ muni de sa topologie $\star$-faible (qui est bien localement convexe) et $\mathfrak{X} := \mathcal{P}_K$. Pour tout $w \in V^* = C^0(K)$ on a

$$\Lambda_{\nu_k}(2kN_k w) = \log\left(Z_k^{-1}\int_{P\in K^{N_k}} e^{2kN_k\langle w, \delta_P\rangle}|V_k(P)|^2_{k\phi_0}\mu^{\otimes N_k}(dP)\right)$$

et donc

$$\frac{1}{2kN_k}\Lambda_{\nu_k}(2kN_k w) = \frac{1}{kN_k}\log\|V_k\|_{L^2(\mu, k(\phi_0 - w))} - \frac{1}{kN_k}\log\|V_k\|_{L^2(\mu, k\phi_0)}.$$

Comme μ est BM par rapport à (K, ϕ) pour tout poids ϕ par hypothèse, on vérifie comme avant en appliquant l'inégalité de BM à chaque variable de V_k successivement que

$$\log\frac{\|V_k\|_{L^2(\mu, k\phi_0)}}{\|V_k\|_{L^\infty(\mu, k\phi_0)}} = o(kN_k)$$

et de même avec $\phi_0 - w$ à la place de ϕ_0. D'après le théorème 2.1 on a donc

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2kN_k}\Lambda_{\nu_k}(2kN_k w) = E\circ P_K(\phi_0) - E\circ P_K(\phi_0 - w),$$

qui est bien une fonction Gâteaux différentiable de w par le théorème 2.3. On conclut par le théorème de Gärtner-Ellis que les mesures de Gibbs satisfont un principe de grande déviation avec comme fonction d'entropie

$$I(\tau) = \sup_{w \in C^0(K)} \left(\langle w, \tau \rangle + E \circ P_K(\phi_0 - w) - E \circ P_K(\phi_0) \right).$$

□

2.3.6. Convergence des configurations de Fekete. Soit (K, ϕ) un compact pondéré non-pluripolaire. Il résulte alors du théorème 2.1 que

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{P \in K^{N_k}} \left(I_k(P) + \langle \phi - \phi_0; \delta_P \rangle \right) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_K} \left(I(\mu) + \langle \phi - \phi_0, \mu \rangle \right) = E_{\mathrm{eq}}(K, \phi).$$

le second infimum étant réalisé exactement pour $\mu = \mu_{(K,\phi)}$ par le corollaire 2.6. Le résultat suivant, démontré dans [**BBW09**], montre que toute suite de configurations de $P_k \in K^{N_k}$ qui réalise asymptotiquement le membre de gauche (et en particulier toute suite de configurations de Fekete) s'équidistribue selon $\mu_{(K,\phi)}$.

Théorème 2.9. *Soit (K, ϕ) un compact pondéré non-pluripolaire. Si $P_k \in K^{N_k}$ est* asympotiquement de Fekete *pour (K, ϕ), i.e. si*

$$I_k(P_k) + \langle \phi - \phi_0; \delta_{P_k} \rangle \to E_{\mathrm{eq}}(K, \phi),$$

alors on a la convergence faible de mesures $\delta_{P_k} \to \mu_{(K,\phi)}$.

Ce résultat se déduit très rapidement des théorèmes 2.1 et 2.3 via une lemme variationnel aussi simple que surprenant qui a ses racines dans le théorème d'équidistribution des points de petite hauteur de Szpiro-Ullmo-Zhang [**SUZ97**] (voir aussi le théorème 3.4).

On pose pour tout poids ψ

$$f_k(\psi) := I_k(P_k) + \langle \psi - \phi_0, \delta_{P_k} \rangle = -\frac{1}{kN_k} \log |V_k(P_k)|_{k\psi}.$$

On a alors $f_k(\psi) \geq -\log d_k(K, \psi)$, ce qui implique que $E_{\mathrm{eq}}(K, \psi)$ est une borne inférieure asymptotique pour $f_k(\psi)$ au sens où

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(\psi) \geq E_{\mathrm{eq}}(K, \psi).$$

L'hypoythèse sur la suite (P_k) dit que cette borne inférieure asympototique est atteinte pour $\psi = \phi$, i.e.

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\phi) = E_{\mathrm{eq}}(K, \psi).$$

On conclut alors en appliquant le lemme élémentaire suivant à $g(t) := E_{\mathrm{eq}}(K, \phi + tv)$ et $g_k(t) := f_k(\phi + tv)$ avec $v \in C^0(K)$.

Lemme 2.10. *Soit $g(t)$ une fonction sur $\mathbb{R}$ et $g_k(t)$ une suite de fonctions concaves telles que $\liminf_k g_k(t) \geq g(t)$ pour tout t et $\lim_k g_k(0) = g(0)$. Si g et les g_k sont dérivables en 0 alors $\lim_k g_k'(0) = g'(0)$.*

A titre d'illustration, mentionnons que les *configurations de Lebesgue*, i.e. les $P \in K^{N_k}$ qui minimisent la norme de l'opérateur d'interpolation en P dans $H^0(kL)$ relativement aux normes sup, sont asymptotiquement de Fekete (cf. [**BBW09**]). Toute suite $P_k \in K^{N_k}$ de configurations de Lebesgue s'équidistribue donc selon la mesure d'équilibre $\mu_{(K,\phi)}$ lorsque $k \to \infty$.

2.4. Equations de Monge-Ampère et mesures d'énergie finie

Nous allons présenter dans ce qui suit une approche variationnelle de la résolution des équations de Monge-Ampère [**BBGZ09**], qui nous permettra en particulier d'analyser de façon plus fine les mesures μ d'énergie finie, i.e. telles que $E^*(\mu) < +\infty$.

Au lieu de travailler avec des poids psh sur un fibré en droite, il sera plus pratique (et plus général) d'adopter le language des fonctions *quasi-plurisousharmonique*. On se donne donc une variété kählérienne compacte (X, ω) normalisée par $\int_X \omega^n = 1$. Une *fonction ω-psh* est une fonction intégrable et scs φ sur X telle que $\omega + dd^c\varphi \geq 0$ au sens des courants. On note $\mathrm{PSH}(X, \omega)$ l'ensemble des fonctions ω-psh et $\mathcal{T}(X, \omega)$ l'ensemble des courants positifs fermés cohomologues à ω, chacun muni de la topologie faible ; l'application naturelle $\varphi \mapsto \omega + dd^c\varphi$ établit alors un isomorphisme $\mathrm{PSH}(X, \omega)/\mathbb{R} \simeq \mathcal{T}(X, \omega)$. Si φ satisfait $\sup_X \varphi = 0$ on dira que φ est le *potentiel normalisé* de $T = \omega + dd^c\varphi$.

Si L est un fibré en droites amples sur X et ϕ_0 est un poids lisse strictement psh de référence on posera $\omega := V^{-1/n} dd^c\phi_0$, et il est alors clair que $\varphi \mapsto \psi = \phi_0 + V^{1/n}\varphi$ établit une bijection entre $\mathrm{PSH}(X, \omega)$ et l'ensemble des poids psh sur L, avec de plus $V^{1/n}(\omega + dd^c\varphi) = dd^c\psi$, ce qui permet de passer aisément d'un point de vue à l'autre. On définit ainsi l'énergie de Monge-Ampère E sur les fonctions ω-psh bornées par

$$E(\varphi) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \int_X \varphi(\omega + dd^c\varphi)^j \wedge \omega^{n-j},$$

qui est ainsi implitement normalisée par $E(0) = 0$. Si K est un compact de X et v est une fonction bornée sur X on définit $P_K v$ comme l'enveloppe scs de la famille des fonctions ω-psh φ telles que $\varphi \leq v$ sur K. Le théorème 2.3 de différentiabilité de $E \circ P_K$ reste alors valable dans ce cadre.

2.4.1. Fonctions et courants d'énergie finie. Si φ est une fonction ω-psh *bornée* alors $\mathrm{MA}(\varphi) := (\omega + dd^c\varphi)^n$ est bien définie en tant que mesure de probabilité d'après Bedford et Taylor, qui garantissent de plus que $\mathrm{MA}(\varphi)$ intègre toutes les fonctions psh, et ne charge donc pas les pluripolaires. La *capacité de Monge-Ampère* Cap est l'enveloppe supérieure de la famille de mesures $\mathrm{MA}(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$; autrement dit on pose

$$\mathrm{Cap}(B) = \sup \left\{ \int_B \mathrm{MA}(\varphi),\ \varphi \in \mathrm{PSH}(X, \omega),\ 0 \leq \varphi \leq 1 \right\}$$

pour tout borélien B de X. On dit qu'une suite de fonctions boréliennes u_j *converge en capacité* vers u si $\mathrm{Cap}(|u_j - u| \geq \varepsilon) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On considère maintenant une fonction ω-psh quelconque φ. On va définir sa *mesure de Monge-Ampère non-pluripolaire* en suivant [**BT87, GZ07**]. On observe que la suite de mesures

$$\mu_k := 1_{\{\varphi > -k\}} \mathrm{MA}(\max(\varphi, -k))$$

est croissante, puisqu'on a même $\mu_k = 1_{\{\varphi > -k\}} \mu_{k+1}$, vu que

$$\max(\varphi, -k) = \max(\varphi, -(k+1)) \text{ sur } \{\varphi > -k\}.$$

Comme la masse de μ_k est au plus 1 la limite croissante des μ_k définit une mesure de Radon sur X, qu'on note $\mathrm{MA}(\varphi)$, la mesure de Monge-Ampère non-polaire de φ. On notera que $\mathrm{MA}(\varphi)$ est non-pluripolaire, en tant que limite croissante de telles mesures.

On dit que φ est *de masse non-pluripolaire maximale* si $\mathrm{MA}(\varphi)$ est de masse 1. Cette condition ne dépend que de $T = \omega + dd^c\varphi$, et on posera alors $T^n := \mathrm{MA}(\varphi)$. On peut plus généralement définir une mesure de probabilité $T_1 \wedge \ldots \wedge T_n$

ne chargeant pas les plruipolaires si les T_j sont de masse non-pluripolaire maximale, et on démontre que cette opération est continue le long des suites monotones de potentiels, cf. [**BEGZ08**].

D'un autre côté, on exploite le fait que l'énergie de Monge-Ampère E est croissante pour l'étendre à $\mathrm{PSH}(X,\omega)$ tout entier en posant

$$E(\varphi) := \inf \{E(\psi),\ \psi\ \omega\text{-psh bornée},\ \psi \geq \varphi\} \in [-\infty, +\infty[.$$

Il est clair que E étendue à $\mathrm{PSH}(X,\omega)$ reste croissante et concave, et on démontre qu'elle est scs, et donc continue le long des suites décroissantes. Elle induit la fonctionnelle J d'Aubin [**Aub84**] définie par

$$J(\varphi) := \int_X \varphi\, \omega^n - E(\varphi),$$

et qui est invariante par translation, donc induit une fonction convexe sci

$$J : \mathcal{T}(X,L) \to [0, +\infty].$$

La caractérisation suivante du domaine de J est essentiellement donnée dans [**GZ07**] :

PROPOSITION 2.11. *Soit $T \in \mathcal{T}(X,\omega)$ un courant positif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $J(T) < \infty$.

(ii) *T est de masse non-pluripolaire maximale et son potentiel normalisé est intégrable par rapport à T^n.*

On note $\mathcal{E}^1(X,\omega) := \{E > -\infty\}$ et $\mathcal{T}^1(X,L) := \{J < +\infty\}$ son image dans $\mathcal{T}(X,\omega)$, de sorte que J fournit une *fonction d'exhaustion* sur $\mathcal{T}^1(X,\omega)$, i.e. $\{J \leq C\}$ est compact pour tout $C > 0$.

2.4.2. Principe variationnel pour l'opérateur de Monge-Ampère. Comme on l'a vu plus haut, pour tout courant positif $T \in \mathcal{T}(X,\omega)$ de masse non-pluripolaire maximale T^n est une mesure de probabilité ne chargeant pas les pluripolaires. Guedj et Zeriahi ont démontré réciproquement dans [**GZ07**] que toute mesure de probabilité non-pluripolaire μ sur X s'écrit $\mu = T^n$ pour un courant positif $T \in \mathcal{T}(X,\omega)$ de masse non-pluripolaire maximale, qui est de plus unique par [**Din09**].

La démonstration de [**GZ07**] consiste à régulariser μ de manière à pouvoir lui appliquer le résultat fondamental de [**Yau78**]. Nous allons expliquer dans cette partie l'approche de [**BBGZ09**] qui utilise le calcul des variations et court-circuite ainsi le théorème de Yau. On introduit pour ce faire la fonctionnelle $F_\mu : \mathcal{E}^1(X,\omega) \to]-\infty, +\infty]$ définie par

$$F_\mu(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi d\mu$$

dont les points critiques sont formellement les solutions de $E'(\varphi) = \mathrm{MA}\,(\varphi) = \mu$, et qui descend à $\mathcal{T}^1(X,\omega)$ par invariance par translation. L'un des résultats principaux de [**BBGZ09**] est le suivant.

THÉORÈME 2.12. *Soit μ une mesure de probabilité sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe $T_\mu \in \mathcal{T}^1(X,L)$ tel que $\mu = T_\mu^n$.*

(ii) *F_μ est propre et scs sur $\mathcal{T}^1(X,L)$.*

(iii) $\sup_{\mathcal{T}^1(X,L)} F_\mu = E^*(\mu) < +\infty$.

(iv) *Chaque $\varphi \in \mathcal{E}^1(X,\omega)$ est localement intégrable par rapport à μ.*

La solution T_μ est alors l'unique maximiseur de F_μ sur $\mathcal{T}^1(X,\omega)$.

L'intérêt de ce résultat, qui construit la solution par une méthode variationnelle, réside aussi dans la propriété de *stabilité* suivante qui en résulte : toute suite $T_j \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$ qui maximise asymptotiquement F_μ (i.e. telle que $F_\mu(T_j) \to E^*(\mu)$) converge nécessairement vers T_μ. Comme nous allons maintenant le voir, cette convergence est en fait meilleure que la convergence faible.

On pose pour $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^1(X,\omega)$

$$I(\varphi,\psi) := \int_X (\varphi - \psi)(\mathrm{MA}\,(\psi) - \mathrm{MA}\,(\varphi)) = -\langle E'(\varphi) - E'(\psi), \varphi - \psi\rangle,$$

qui est positive par concavité de E. Cette fonctionnelle I est essentiellement celle introduite par Aubin [**Aub84**]. On montre que

$$\frac{1}{n+1} I(\varphi,\psi) \le E(\psi) - E(\varphi) + \int_X (\varphi - \psi)\mathrm{MA}\,(\psi) \le I(\varphi,\psi). \tag{2.4}$$

La fonctionnelle I descend à $\mathcal{T}^1(X,\omega)$ par invariance par translation, et on dira qu'une suite $T_j \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$ *converge en énergie* vers $T \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$ ssi $I(T_j,T) \to 0$. Par (2.4) ceci a donc lieu ssi T_j maximise asymptotiquement F_{T^n}.

L'énoncé suivant indique que la convergence en énergie est effectivement plus forte que la convergence faible.

Proposition 2.13. *Si $T_j \to T$ en énergie alors le potentiel normalisé de T_j converge vers celui de T en capacité et $T_j^n \to T^n$ faiblement.*

Sa preuve repose sur le lemme suivant, qui s'obtient par une série d'intégrations par parties et d'inégalités de Schwarz s'inspirant de la preuve d'unicité de [**Bło03**]. Posons pour $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in \mathcal{E}^1(X,\omega)$

$$K(\varphi,\psi,\varphi',\psi') := \int_X (\varphi - \psi)(\mathrm{MA}\,(\varphi') - \mathrm{MA}\,(\psi')),$$

qui induit une fonctionnelle $K(T,S,T',S')$ sur les courants dans $\mathcal{T}^1(X,L)$ par invariance par translation. Notons que $I(T,S) = K(T,S,S,T)$.

Lemme 2.14. *Pour tout $C > 0$ on a $K(T,S,T',S') \to 0$ pour T,S,T',S' dans $\{J \le C\}$ tels que $I(T,S) \to 0$ (resp. $I(T',S') \to 0$), uniformément par rapport à T',S' (resp. T,S).*

2.4.3. Fonctionnelles d'intégration. Soit μ est une mesure de probabilité sur X. Une des difficultés de la démonstration du théorème 2.12 est d'analyser les propriétés de continuité de $\varphi \mapsto \int_X \varphi\, d\mu$ sur $\mathrm{PSH}(X,\omega)$, qui est, rappelons-le, muni de la topologie faible, équivalente à la topologie $L^1(X,\omega^n)$. Le théorème de Fatou donne facilement la semi-continuité *supérieure* de $\int_X \varphi, d\mu$, mais étant donné que $F_\mu(\varphi) = E(\varphi) - \int_X \varphi, d\mu$ où E est également scs, c'est plutôt la semi-continuité *inférieure* de $\int_X \varphi\, d\mu$ (et donc sa continuité tout-court) dont on a besoin. Il est ici encore plus pratique de travailler avec la version invariante par translation

$$L_\mu(\varphi) := \int_X \varphi\,(\mu - \omega^n)\,.$$

qui descend en une fonctionnelle affine et scs

$$L_\mu : \mathcal{T}(X,\omega) \to [-\infty, +\infty[.$$

Notons que $J + L_\mu = -F_\mu$. On montre alors le résultat suivant (cf. [**BBGZ09**, Proposition 3.4]) :

Proposition 2.15. *Si μ est une mesure de probabilité qui intègre les fonctions de $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ alors $L_\mu = O(J^{1/2})$ sur $\mathcal{T}^1(X,\omega)$.*

Ceci garantit en particulier que $F_\mu \to -\infty$ lorsque $J \to +\infty$, et même que F_μ est J-*coercive* au sens où il existe $\varepsilon, A > 0$ tels que

$$F_\mu \le -\varepsilon J + A.$$

Comme J est propre, la semi-continuité de F_μ est par conséquent équivalente à celle de sa restriction à $\{J \le C\}$ pour tout $C > 0$. Notons que la proposition 2.15 démontre en particulier l'équivalence entre les points (iii) et (iv) du théorème 2.12.

Si l'on sait déja que $\mu = T^n$ avec $T \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$, la semi-continuité de F_μ s'établit comme suit. On observe que $L_{T^n} - L_{S^n} = K(\cdot,\omega,T,S)$, et il résulte donc du lemme 2.14 que $L_{T_j^n}$ converge uniformément vers L_{T^n} sur $\{J \le C\}$ pour tout $C > 0$ si $T_j \to T$ en énergie. Comme on sait qu'on peut choisir une telle suite T_j qui soit lisse par régularisation [**Dem92**] on en déduit que L_{T^n} est continue sur $\{J \le C\}$ pour tout $C > 0$, ce qui démontre bien que F_μ est scs sur $\mathcal{T}^1(X,\omega)$. On a donc montré que (i) implique (ii) dans le théorème 2.12.

On va en déduire ici à titre de remarque le résultat suivant :

PROPOSITION 2.16. *L'espace* $\mathcal{T}^1(X,\omega)$ *est* complet *pour la topologie de la convergence en énergie.*

DÉMONSTRATION. Soit $T_j \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$ une suite telle que $I(T_j,T_k) \to 0$ pour $j,k \to \infty$. Ceci implique en particulier que $J(T_j)$ est bornée, et on peut donc extraire une limite faible T des T_j. On va montrer que $I(T_j,T) \to 0$. Par (2.4) on a en effet

$$J(T_k) - J(T_j) + L_{T_j^n}(T_k) - L_{T_j^n}(T_j) \le I(T_j,T_k).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ on choisit N tel que $I(T_j,T_k) \le \varepsilon$ pour $j,k \ge N$ et on obtient en faisant $k \to \infty$

$$J(T) - J(T_j) + L_{T_j^n}(T) - L_{T_j^n}(T_j) \le \varepsilon,$$

puisque J est sci et $L_{T_j^n}$ est continue sur $\{J \le C\}$. On en déduit que $I(T_j,T) \le (n+1)\varepsilon$ pour $j \ge N$ par (2.4). □

2.4.4. Caractérisation variationnelle. Un des points-clé de la démonstration du théorème 2.12 est la caractérisation variationnelle suivante de la solution d'une équation de Monge-Ampère, qu'on obtient grâce au théorème 2.3 de différentiabilité de l'énergie en suivant une stratégie due à Aleksandrov [**Ale38**].

PROPOSITION 2.17. *Soit* $T \in \mathcal{T}^1(X,\omega)$ *et* μ *une mesure de probabilité sur* X. *Alors on a*

$$F_\mu(T) = \sup F_\mu \iff \mu = T^n.$$

Si $T = \omega + dd^c\varphi$ réalise le maximum de F_μ on voit en effet que $\psi \mapsto E(\psi) - \int_X \psi\, d\mu$ atteint sur maximum sur $\mathcal{E}^1(X,\omega)$ en φ, et on voudrait conclure que sa dérivée $E'(\varphi) - \mu$ est nulle. La difficulté est qu'une perturbation de φ par un élément de $C^\infty(X)$ n'a plus de raison d'être dans $\mathcal{E}^1(X,\omega)$. On introduit alors en suivant Aleksandrov l'opérateur d'enveloppe ω-psh P, qui associe à toute fonction scs v l'enveloppe supérieure de la famille des fonctions ω-psh ψ telles que $\psi \le u$ (et $P(v) \equiv -\infty$ si cette famille est vide). Si on se donne une fonction $v \in C^\infty(X)$ alors $P(\varphi + tv)$ est bien défini pour $t \in \mathbb{R}$ et l'inégalité $P(\varphi + tv) \le \varphi + tv$ implique facilement que

$$g(t) := E \circ P(\varphi + tv) - t \int_X v\, d\mu$$

atteint son maximum en $t = 0$. Mais on déduit aisément du théorème 2.3 que $t \mapsto E \circ P(\varphi + tv)$ est dérivable en $t = 0$, de dérivée $\int_X v\mathrm{MA}\,(\varphi)$, et on obtient donc

$$\int_X v\mathrm{MA}\,(\varphi) - \int_X v\, d\mu = 0$$

pour tout fonction $v \in C^\infty(X)$, ce qui démontre bien que $\mathrm{MA}(\varphi) = \mu$.

Pour terminer la démonstration du théorème 2.12 il resterait donc à établir que toute mesure μ d'énergie finie, i.e. telle que $E^*(\mu) < +\infty$, a la propriété que L_μ est continue sur $\{J \le C\}$ pour tout $C > 0$. Ceci démontrerait en effet comme on l'a vu que F_μ est scs sur $\mathcal{T}^1(X, \omega)$. Étant également propre elle atteindrait donc son supremum en un courant $T_\mu \in \mathcal{T}^1(X, \omega)$, solution de $T_\mu^n = \mu$ par la proposition 2.17.

La stratégie suivie dans [**BBGZ09**] est cependant plus compliquée. N'étant pas capables d'établir *a priori* la continuité de L_μ sur $\{J \le C\}$ pour toute mesure μ d'énergie finie, nous commençons par l'établir si μ est linéairement dominée par la capacité, i.e. $\mu \le A\mathrm{Cap}$ pour $A > 0$. Ceci repose sur une estimation de la décroissance de la capacité des ensembles de sous-niveau $\mathrm{Cap}\{\varphi < -t\}$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$.

Nous combinons ceci dans un second temps avec un argument de Cegrell [**Ceg98**] pour montrer directement que toute mesure μ d'énergie finie est de la forme $\mu = T^n$ avec $T \in \mathcal{T}^1(X, \omega)$. Une version générale du théorème de Radon-Nykodim permet en effet de montrer qu'il existe une mesure de probabilité ν linéairement dominée par la capacité telle que μ est absolument continue par rapport à ν, i.e. $\mu = f\nu$ avec $f \in L^1(\nu)$. Chaque mesure $\mu_k := c_k \min(f, k)\nu$ (où $c_k > 0$ normalise la masse) est alors linéairement dominée par la capacité, donc de la forme $\mu_k = T_k^n$ avec $T_k \in \mathcal{T}^1(X, \omega)$. Il n'est de plus pas difficile de borner $E^*(\mu_k)$, et donc $J(T_k)$, en fonction de $E^*(\mu)$. On en déduit donc que les T_k restent dans un compact $\{J \le C\}$. Si T est une valeur d'adhérence des T_k alors un autre argument de Cegrell montre

$$T^n \ge \left(\liminf_{k\to\infty} c_k \min(f, k)\right)\nu = \mu,$$

d'où $T^n = \mu$ puisque ces deux mesures ont même masse.

2.4.5. Convergence des métriques équilibrées. On suppose à nouveau que L est un fibré en droites ample sur X, qu'on munit d'un poids lisse strictement psh ϕ_0 de référence. On pose $\omega = dd^c\phi_0$. La *quantification de Toeplitz* introduit $H^0(kL)$ muni du produit scalaire $L^2(\omega^n, k\phi_0)$. Notons que l'espace non-commutatif associé est fini, à $N_k = h^0(kL)$ éléments. A une observable $f \in C^\infty(X)$ est associée l'operateur de Toeplitz $T_{k,f}$ défini comme la multiplication par f suivie de la projection de Bergman $C^\infty(X, kL) \to H^0(X, kL)$. Cet opérateur est caractérisé par la relation

$$\int_X f|s|^2_{k\phi_0} = \langle T_{k,f}s, s\rangle,\ s \in H^0(kL),$$

et l'on voit donc que

$$\mathrm{Hilb}_k(\varphi) := T_{k,\exp(-2kV^{1/n}\varphi)}$$

est l'opérateur auto-adjoint associé au produit scalaire $L^2(V\omega^n, k(\phi_0 + V^{1/n}\varphi))$.

Étant donnée une mesure μ d'énergie finie sur X on a vu que la solution $T_\mu \in \mathcal{E}^1(X, \omega)$ de $T_\mu^n = \mu$ est caractérisée comme l'unique minimiseur de $J + L_\mu$ sur $\mathcal{T}^1(X, L)$. En suivant les idées de Donaldson [**Don05**] on cherche à « quantifier »ce problème. On note

$$\mathcal{H}_k \simeq \mathrm{GL}(N_k, \mathbb{C})/\mathrm{U}(N_k)$$

l'ensemble des opérateurs auto-adjoints H *définis positifs* de $H^0(kL)$, qu'on munit de sa structure naturelle d'*espace riemannien symétrique*, pour laquelle les géodésiques sont les orbites de groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}(N_k, \mathbb{C})$. On dispose d'une injection naturelle

$$\mathrm{FS}_k : \mathcal{H}_k \to \mathrm{PSH}(X, \omega)$$

qui associe à $H \in \mathcal{H}_k$ la « métrique de Fubiny-Study »

$$\mathrm{FS}_k(H) := \frac{1}{2kV^{1/n}} \log \sum_j |s_j|^2_{k\phi_0},$$

où (s_j) est une base $\langle H\cdot, \cdot\rangle$-orthonormée de $H^0(kL)$, et qui passe au quotient

$$\mathrm{FS}_k : \mathcal{H}_k/\mathbb{R}_+ \to \mathcal{T}^1(X, \omega).$$

On pose maintenant

$$J_k(H) := \frac{1}{kN_k} \log \det H + L_\omega \circ \mathrm{FS}_k(H)$$

qui descend elle aussi à $\mathcal{H}_k/\mathbb{R}_+$ et en fournit une fonction d'exhaustion convexe d'après [**Don05**, Proposition 3]. Si μ est une mesure de probabilité sur X on dit en suivant Donaldson que $H \in \mathcal{H}_k$ est *k-équilibré* relativement à μ si c'est un point critique (ou de façon équivalente un minimiseur) de $J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k$, cette dernière fonction étant également convexe sur $\mathcal{H}_k$ (et même strictement convexe si μ ne charge pas les fermés de Zariski, cf. [**BBGZ09**, Lemma 7.2]).

Le résultat suivant est démontré dans [**BBGZ09**].

Théorème 2.18. *La fonction $J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k$ est propre sur $\mathcal{H}_k/\mathbb{R}_+$ pour tout k assez grand. Elle atteint son minimum en un unique $H_k \in \mathcal{H}_k/\mathbb{R}_+$, et on a*

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{FS}_k(H_k) = T_\mu,$$

l'unique minimiseur de $J + L_\mu$. On a de plus

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\mathcal{H}_k}(J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k) = \inf_{\mathcal{T}^1(X,\omega)}(J + L_\mu).$$

On commence par montrer que

$$J_k(\mathrm{Hilb}_k(\psi)) \to J(\psi) \tag{2.5}$$

pour toute fonction lisse strictement ω-psh ψ. Le théorème de Bouche-Catlin-Tian-Zelditch implique en effet que $\mathrm{FS}_k \circ H_k(\psi)$ converge uniformémemt vers ψ, et on a donc

$$L_\omega \circ \mathrm{FS}_k \circ \mathrm{Hilb}_k(\psi) \to L_\omega(\psi).$$

Il resulte par ailleurs du théorème 2.1 que

$$-\frac{1}{kN_k} \log \det \mathrm{Hilb}_k(\psi) = \frac{1}{kN_k} \|V_k\|_{L^2(V\omega^n, k(\phi_0 + V^{1/n}\psi))}$$

converge vers $-E(\psi)$, et on obtient bien (2.5). On a de même

$$L_\mu \circ \mathrm{FS}_k \circ \mathrm{Hilb}_k(\psi) \to L_\mu(\psi)$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} (J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k)(\mathrm{Hilb}_k(\psi)) = (J + L_\mu)(\psi).$$

Comme ceci est valable pour tout poids lisse strictement psh ψ, et que ces derniers sont denses dans $\mathcal{E}^1(X, \omega)$, il en résulte que

$$\limsup_{k\to\infty} \inf_{\mathcal{H}_k}(J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k) \leq \inf_{\mathcal{T}^1(X,\omega)}(J + L_\mu)$$

Le point clé de la démonstration du théorème 2.18 est alors une comparaison asymptotique de J_k et $J \circ \mathrm{FS}_k$:

Lemme 2.19. *On a*

$$J \circ \mathrm{FS}_k \leq (1 + o(1))J_k + o(1)$$

uniformément sur $\mathcal{H}_k$ lorsque $k \to \infty$.

En utilisant le fait que $J+L_\mu$ est J-coercive, i.e. satisfait une estimée $J+L_\mu \geq \varepsilon J+A$, il est alors aisé de montrer que $J_k+L_\mu \circ \mathrm{FS}_k$ est J_k-coercive, et donc propre, pour $k \gg 1$. Ceci montre donc l'existence d'un miniseur H_k, unique dans $\mathcal{H}_k/\mathbb{R}_+$. On obtient même une estimée *uniforme par rapport à k*

$$J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k \geq \delta J_k + B. \tag{2.6}$$

Comme la limsup de

$$\inf_{\mathcal{H}_k}(J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k) = (J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k)(H_k)$$

est majorée par $\inf_{\mathcal{T}^1(X,\omega)}(J+L_\mu)$, ceci implique en particulier que $J_k(H_k) = O(1)$. D'un autre côté on a

$$(J + L_\mu)(\mathrm{FS}_k(H_k)) - (J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k)(H_k) \leq o(1)J_k(H_k) + o(1)$$

par le lemme 2.19, et on en déduit donc que

$$\limsup_{k\to\infty}(J + L_\mu)(\mathrm{FS}_k(H_k) \leq \liminf_{k\to\infty}(J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k)(H_k).$$

En combinant ce qui précède on obtient ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\mathcal{H}_k}(J_k + L_\mu \circ \mathrm{FS}_k) = \inf_{\mathcal{T}^1(X,\omega)}(J + L_\mu)$$

d'une part, et

$$\lim_{k\to\infty}(J + L_\mu)(\mathrm{FS}_k(H_k)) = \inf_{\mathcal{T}^1(X,\omega)}(J + L_\mu),$$

d'autre part. On voit donc que $\mathrm{FS}_k(H_k)$ minimise asymptotiquement $J + L_\mu$, et converge par conséquent vers T_μ par le théorème 2.12.

Remarque 2.20. Par analogie avec le théorème 2.8 il est tentant d'imaginer que J_k converge vers J au sens des grandes déviations.

CHAPITRE 3

Géométrie d'Arakelov

Après quelques rappels sur les hauteurs, cette partie présente certains aspects du travail [**BC09**] en commun avec Huayi Chen, suivi d'un théorème d'équidistribution des points de petite hauteur extrait de [**BB08**].

3.1. Hauteurs

Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, et L un fibré en droites sur X/K. Par souci de simplicité on prendra $K = \mathbb{Q}$ dans ce qui suit. Par *une donnée d'Arakelov* $\overline{L} = (\mathcal{L}, \phi)$ on entendra :

- le choix d'un modèle $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ sur $\mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{X}$ soit projectif et plat sur $\mathbb{Z}$,
- la donnée d'une métrique continue $e^{-\phi}$ sur $L_{\mathbb{C}}$ qui soit invariante par conjugaison complexe.

Le choix d'un modèle sur $\mathbb{Z}$ peut être interprété comme la donnée de métriques aux places finies, mais ceci ne jouera pas de rôle dans la suite. On notera G le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, qui agit sur $X(\overline{\mathbb{Q}})$. Le *degré* $\deg(x)$ d'un point $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ est défini comme le cardinal de son orbite sous G. La donnée de $\overline{L}$ permet de définir la *hauteur* d'un point $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$

$$h_{\overline{L}}(x) = h_{\mathcal{L},\phi}(x) \in \mathbb{R}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) Pour toute section $s \in H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L})$ telle que $s(x) \neq 0$ (et donc $s \neq 0$ sur $G \cdot x$) on a

$$h_{\overline{L}}(x) \geq \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \in G \cdot x} \tfrac{1}{k} \log |s(y)|^{-1}_{k\phi},$$

la moyenne de $\frac{1}{k} \log |s|^{-1}_{k\phi}$ le long de l'orbite de Galois de x.

(ii) Pour toute fonction continue $v \in C^0(X(\mathbb{C}))$ invariante par conjugaison on a

$$h_{\mathcal{L},\phi+v}(x) = h_{\mathcal{L},\phi}(x) + \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \in G \cdot x} v(y).$$

Le *minimum essentiel* de la hauteur est défini par

$$\text{min-ess}\, h_{\overline{L}} := \sup \left\{ \inf_{U(\overline{\mathbb{Q}})} h_{\overline{L}},\ U \subset X \text{ ouvert de Zariski non-vide de } X \right\} \in [-\infty, +\infty]$$

Lemme 3.1. *On a toujours min-ess $h_{\overline{L}} < +\infty$, et de plus min-ess $h_{\overline{L}} > -\infty$ s'il existe k tel que $H^0(kL) \neq 0$ (donc en particulier si L est gros).*

Ce fait est une conséquence des résultats profonds de [**Zha95**], mais nous préférons donner ici un argument élémentaire qui nous a été indiqué par Antoine Chambert-Loir.

Démonstration. Nous allons démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\{ x \in X(\overline{\mathbb{Q}}),\ |h_{\overline{L}}(x)| \leq C \right\}$$

est Zariski-dense dans X, ce qui impliquera que min-ess $h_{\overline{L}} \leq C$. A un terme borné près $h_L = h_{\overline{L}} + O(1)$ ne dépend que de $L \in \mathrm{Pic}(X)$. On peut de plus supposer que L est très ample en l'écrivant comme différence de deux fibrés très amples, de sorte qu'il existe un morphisme fini $f : X \to \mathbb{P}^n$ tel que $L = f^*\mathcal{O}(1)$. On a alors $h_L = h_{\mathcal{O}(1)} \circ f + O(1)$, et l'image inverse par f de l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n$ ayant des racines de l'unité pour coordonnées homogènes fournit alors un ensemble Zariski-dense de points de $X(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur bornée.

Supposons maintenant que $H^0(kL) \neq 0$. Le théorème de changement de base garantit que $H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^0(X, kL)$, donc il existe une section non-nulle $s \in H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L})$. Si on pose $U := \{s \neq 0\}$ alors on a $h_{\overline{L}}(x)$ est la moyenne de $-\frac{1}{k}\log|s|_{k\phi}$ sur $G \cdot x$ pour tout $x \in U(\overline{\mathbb{Q}})$, et il en résulte que $h_{\overline{L}}$ est minorée sur $U(\overline{\mathbb{Q}})$ puisque $|s|_{k\phi}$ est continue sur le compact $X(\mathbb{C})$. □

3.2. Volume arithmétique et corps d'Okounkov

Soit $L \to X/\mathbb{Q}$ un fibré en droites sur une variété projective et soit $\overline{L} = (\mathcal{L}, \phi)$ une donnée d'Arakelov sur L. On définit l'ensemble des *petites sections* de $k\overline{L}$ par

$$\widehat{H}^0(k\overline{L}) := H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L}) \cap \mathcal{B}^\infty(X, k\phi).$$

L'existence d'une petite section non-nulle s fournit des informations sur la hauteur des points, garantissant par exemple que min-ess $h_{\overline{L}} \geq 0$. L'ensemble $\widehat{H}^0(k\overline{L})$ est fini et on pose

$$\widehat{h}^0(k\overline{L}) := \log \mathrm{card}\, \widehat{H}^0(k\overline{L}),$$

dont la description du comportement asymptotique lorsque $k \to \infty$ est un problème central en géométrie d'Arakelov, analogue du problème de Riemann-Roch asymptotique en géométrie algébrique. On introduit ainsi le *volume arithmétique* de $\overline{L}$ par

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) := \limsup_{k\to\infty} \frac{(n+1)!}{k^{n+1}} \widehat{h}^0(k\overline{L}).$$

Lorsque $\mathcal{L}$ est relativement ample et ϕ est lisse strictement psh, on déduit du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique [**GS92, AB95**] que $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$ existe en tant que limite et coïncide avec le nombre d'intersection arithmétique $(\hat{c}_1(\overline{L})^{n+1})$. gmail

L'un des objectifs de l'article [**BC09**] est de donner dans le cas général une démonstration simple de l'existence de $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L})$ comme *limite*, d'une version arithmétique du théorème de Fujita sur les volumes, et de la log-concavité de $\widehat{\mathrm{vol}}$. Ces résultats avaient déjà été démontrés par d'autres méthodes par Chen, Moriwaki et Yuan [**Che08, Mor09a, Yua09**].

Notre approche repose sur la théorie des *corps d'Okounkov* [**LM09, KK08**]. Sans en rappeler les détails nous nous contenterons de dire qu'elle associe à tout fibré en droites gros L sur une variété projective X de dimension n un *corps convexe* $\Delta(L) \subset \mathbb{R}^n$ dont le volume euclidien satisfait

$$\mathrm{vol}\,\Delta(L) = \lim_{k\to\infty} k^{-n} h^0(kL),$$

ce qui démontre en particulier que $\mathrm{vol}(L)$ existe en tant que limite et qu'il est log-concave par l'inégalité de Brunn-Minkowski. On peut plus généralement définir le corps d'Okounkov $\Delta(V_\bullet) \subset \Delta(L)$ d'une sous-algèbre graduée $V_\bullet$ de l'algèbre $R(X, L) := \bigoplus_{k\geq 0} H^0(kL)$ des sections de L.

Revenant maintenant au cadre arithmétique on introduit la *filtration par les minima* $t \mapsto \mathcal{F}_k^t$ de $H^0(kL)$ en posant pour $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_k^t = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} \left\{ s \in H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L}),\ \sup_{X(\mathbb{C})} |s|_{k\phi} \leq e^{-t} \right\}.$$

Les *valeurs de saut*

$$e_j(\mathcal{F}_k) := \sup\left\{t \in \mathbb{R}, \dim \mathcal{F}_k^t \geq j\right\}$$

de cette filtration sont essentiellement les *minima successifs* du réseau $H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L})$ muni de la norme sup. Un théorème fondamental de Gillet et Soulé [**GS91**] estimant le nombre de points entiers d'un réseau en terme des minima successifs implique donc que

$$\sum_{e_j(\mathcal{F}_k)>0} e_j(\mathcal{F}_k) = \widehat{h}^0(k\overline{L}) + o(k^{n+1}).$$

On remarque par ailleurs que la filtration $\mathcal{F}$ induite sur l'algèbre graduée $R(X, L)$ est *multiplicative* :

$$\mathcal{F}_k^t \cdot \mathcal{F}_m^s \subset \mathcal{F}_{k+m}^{t+s},$$

ponctuellement minorée :

$$\mathcal{F}_k^{-t} = H^0(kL) \text{ pour } t \gg 1,$$

et *linéairement majorée* au sens où il existe $C > 0$ tel que

$$\mathcal{F}_k^t = 0 \text{ pour } t \geq Ck.$$

Il suffit en effet de prendre $C \geq$ min-ess $h_{\overline{L}}$, ce qui est possible par le lemme 3.1. On considère alors la sous-algèbre graduée $V_\bullet^t$ de $R(X, L)$ définie par $V_k^t := \mathcal{F}_k^{kt}$, son corps d'Okounkov $\Delta(V_\bullet^t) \subset \Delta(L)$, et la fonction d'incidence $G_\mathcal{F}$ définie sur $\Delta(L)$ par

$$G_\mathcal{F}(x) = \sup\left\{t \in \mathbb{R},\, x \in \Delta(V_\bullet^t)\right\}.$$

Le résultat principal de [**BC09**] est le résultat d'équidistribution suivant :

THÉORÈME 3.2. *Soit K un corps arbitraire, X une K-variété projective et L un fibré en droites gros sur X. Soit $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-filtration décroissante de $R(X, L)$ qui soit multiplicative, ponctuellement minorée et linéairement majorée. Alors les valeurs de saut normalisées $k^{-1}e_j(\mathcal{F}^k)$, $j = 1, ..., N_k$, s'équidistribuent lorsque $k \to \infty$ selon la mesure image de la mesure de Lebesgue par $G_\mathcal{F}$.*

Dans le cadre arithmétique où $\mathcal{F}$ est la filtration par les minima on peut alors définir le *corps d'Okounkov arithmétique* de $\overline{L}$ en posant

$$\Delta(\overline{L}) := \{(x, t) \in \Delta(L) \times \mathbb{R},\, 0 \leq t \leq G_\mathcal{F}(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

et on obtient comme conséquence :

COROLLAIRE 3.3. *Si L est un fibré en droites gros sur $X/\mathbb{Q}$ muni d'une donnée d'Arakelov $\overline{L}$ alors on a*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \widehat{h}^0(k\overline{L}) = \operatorname{vol} \Delta(\overline{L}).$$

La log-concavité du volume arithmétique en découle en appliquant à nouveau l'inégalité de Brunn-Minkowski.

3.3. Équidistribution des points de petite hauteur

Soit $L \to X/\mathbb{Q}$ un fibré en droites ample et $\mathcal{L} \to \mathcal{X}$ un modèle entier. Si ϕ est un poids continu sur $L_\mathbb{C}$ invariant par conjugaison alors il résulte de [**RLV00**] que

$$E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(X, \phi) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kN_k} \log \operatorname{vol} \mathcal{B}_\mathbb{R}^\infty(X, k\phi) \in [-\infty, +\infty[$$

est bien définie. La quantité $\exp(-(n+1)(L^n)E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(X, \phi))$ est appelée *capacité sectionnelle* dans [**RLV00**]. Un preuve substantiellement plus simple de l'existence de cette limite est donnée dans [**BC09**] en utilisant le théorème 3.2. Pour tout compact pondéré (X,ϕ) invariant par conjugaison complexe il résulte alors du théorème 2.2 que

$$E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{kN_k} \log \operatorname{vol} \mathcal{B}^\infty_{\mathbb{R}}(K,k\phi) \in [-\infty,+\infty[$$

est également bien définie, avec

$$E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K_1,\phi_1) = E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K_2,\phi_2) + E_{\mathrm{eq}}(K_1,\phi_1) - E_{\mathrm{eq}}(K_2,\phi_2).$$

On dira que $E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}$ est finie si $E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi) > -\infty$ pour un, et donc tout, compact pondéré (K,ϕ).

Supposons maintenant que $K \cap X(\overline{\mathbb{Q}})$ est invariant par le groupe de Galois G, ce qui est évidemment satisfait si $K = X(\mathbb{C})$, mais aussi par exemple si $K = T$ est le tore compact unité de $\mathbb{P}^n$. On va montrer que $E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi)$ est un minorant asymptotique de la hauteur $h_{\overline{L}}(x_j)$ de toute *suite générique* de points algébriques $x_j \in K \cap X(\overline{\mathbb{Q}})$, i.e. telle que x_j s'échappe de tout fermé de Zariski de X pour $j \gg 1$. Un théorème de Minkowski assure en effet qu'il existe une section non-nulle $s \in H^0(\mathcal{X}, k\mathcal{L})$ telle que $\|s\|_{L^\infty(K,k\phi)} \le R$ des que $\operatorname{vol} \mathcal{B}^\infty(K,k\phi) > (2R)^{N_k}$. On a $s(x_j) \neq 0$ pour $j \gg 1$ et on en déduit donc que $h_{\overline{L}}(x_j) \ge -\frac{1}{k}\log R$ puisque $h_{\overline{L}}(x_j)$ est la moyenne de $\frac{1}{k}\log|s|^{-1}_{k\phi}$ le long de l'orbite de Galois de x_j, qui est contenue dans K par hypothèse. On obtient ainsi

$$\liminf_{j\to\infty} h_{\overline{L}}(x_j) \ge \frac{1}{kN_k} \log \operatorname{vol} \mathcal{B}^\infty(K,k\phi) - \tfrac{1}{k}\log 2$$

et donc

$$\liminf_{j\to\infty} h_{\overline{L}}(x_j) \ge E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi). \tag{3.1}$$

Pour $K = X$ ceci signifie que

$$\text{min-ess } h_{\mathcal{L},\phi} \ge E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(X,\phi).$$

On démontre dans [**BB08**] le théorème d'équidistribution suivant, qui généralise [**SUZ97**] et [**Yua08**] (lequel traite également le cas des places finies).

Théorème 3.4. *Soit $L \to X/\mathbb{Q}$ un fibré en droites ample et $\mathcal{L}$ un modèle entier tel que $E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}$ soit finie. Supposons que (K,ϕ) soit un compact pondéré non-pluripolaire tel que $K \cap X(\overline{\mathbb{Q}})$ soit invariant sous le groupe de Galois. Si $x_j \in K \cap X(\overline{\mathbb{Q}})$ est une suite générique telle que*

$$\lim_{j\to\infty} h_{\mathcal{L},\phi}(x_j) = E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi)$$

alors les orbites de Galois $G \cdot x_j$ s'équidistribuent selon la mesure d'équilibre $\mu_{(K,\phi)}$ lorsque $j \to \infty$.

La démonstration, qui est similaire à celle du théorème 2.9, repose elle aussi sur le principe variationnel de [**SUZ97**].

Démonstration. Comme K et ϕ sont tous deux invariants par conjugaison, on voit facilement que la mesure d'équilibre $\mu_{(K,\phi)}$ l'est aussi, et il suffit donc de démontrer que

$$\frac{1}{\deg(x_j)} \sum_{y\in G\cdot x_j} v(y) \to \int v\, \mu_{(K,\phi)}$$

pour toute fonction continue v invariante par conjugaison. Posons pour $t \in \mathbb{R}$

$$g_j(t) := h_{\mathcal{L},\phi+tv}(x_j)$$

et

$$g(t) := E_{\mathcal{L},\mathrm{eq}}(K,\phi+tv).$$

On a alors $\liminf_{j\to\infty} g_j(t) \ge g(t)$ pour tout t par (3.1) et $g_j(0) \to g(0)$ par hypothèse. Les propriétés générales de la hauteur montrent en outre que g_j est affine avec $g_j'(0) = \frac{1}{\deg(x_j)} \sum_{y \in G \cdot x_j} v(y)$, alors que $g'(0) = \int v \, \mu_{(K,\phi)}$ par le théorème 2.3. On est donc ramenés à montrer que $g_j'(0) \to g'(0)$, ce qui découle du lemme 2.10. $\square$

Bibliographie

[Ale38] Aleksandrov A.D. *On the theory of mixed volumes of convex bodies III : Extension of two theorems of Minkowski on convex polyhedra to arbitrary convex bodies* (Russian). Mat. Sbornik **3** (1938), no.1, 27–44. [English translation available in Selected works part I : Selected scientific papers. Gordon and Breach]

[AB95] Abbes, A. ; Bouche, T. *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique"*. Ann. Inst. Fourier **45** (1995), no. 2, 375–401.

[Aub84] Aubin, T. *Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité.*. J. Funct. Anal. **57** (1984), no. 2, 143–153.

[BT87] Bedford, E. ; Taylor, B.A. *Fine topology, Šilov boundary, and* $(dd^c)^n$. J. Funct. Anal. **72** (1987), no. 2, 225–251.

[Ber08] Berman, R. *Large deviations and entropy for determinantal point processes on complex manifolds.* Prépublication (2008) arXiv :0812.4224.

[BB08] Berman, R. ; Boucksom S. *Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium.* Invent. Math. **181** (2010), no. 2, 337–394.

[BBGZ09] Berman, R. ; Boucksom, S. ; Guedj, V. ; Zeriahi, A. *A variational approach to complex Monge-Ampère equations.* Prépublication (2009) arXiv :0907.4490.

[BBW09] Berman, R. ; Boucksom S., Witt-Nyström, D. *Fekete points and convergence towards equilibrium measures on complex manifolds.* Prépublication arXiv :0907.2820. À paraître dans Acta Math.

[Bło03] Błocki, Z. *Uniqueness and stability for the complex Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds.* Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no. 6, 1697–1701.

[BL10a] Bloom, T. ; Levenberg, N. *Transfinite diameter notions in* $\mathbb{C}^N$ *and integrals of Vandermonde determinants.* Ark. Mat. **48** (2010), no. 1, 17–40.

[BL10b] Bloom, T. ; Levenberg, N. *Pluripotential energy.* Prépublication arXiv :1007.2391.

[BGS94] Bost, J.-B. ; Gillet, H. ; Soulé, C. *Heights of projective varieties and positive Green forms.* J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 4, 903–1027.

[Bo90] Bouche, T. *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif.* Ann. Inst. Fourier (1) **40** (1990), 117–130.

[BC09] Boucksom, S. ; Chen, H. *Okounkov bodies of filtered linear series.* Prépublication (2009) arXiv :0911.2923.

[BDPP04] Boucksom, S. ; Demailly, J.-P. ; Paun, M. ; Peternell, T. *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension.* Prépublication (2004) arXiv :math/0405285. À paraître dans J. Alg. Geom.

[BEGZ08] Boucksom, S. ; Eyssidieux, P. ; Guedj, V. ; Zeriahi, A. *Monge-Ampère equations in big cohomology classes.* arXiv :0812.3674. À paraître dans Acta Math.

[BFJ08a] Boucksom, S. ; Favre, C. Jonsson, M. *Degree growth of meromorphic surface maps.* Duke Math. J. **141** (2008), no. 3, 519–538.

[BFJ08b] Boucksom, S. ; Favre, C. ; Jonsson, M. *Valuations and plurisubharmonic singularities.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 449–494.

[BFJ09] Boucksom, S. Favre, C. ; Jonsson, M. *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier.* J. Alg. Geom. **18** (2009), no. 2, 279–308.

[Cat99] Catlin, D. *The Bergman kernel and a theorem of Tian.* In Analysis and geometry in several complex variables (Katata, 1997), Trends Math., pages 1-23. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999.

[Ceg98] Cegrell, U. *Pluricomplex energy.* Acta Math. **180** (1998), no. 2, 187–217.

[Che08] Chen, H. *Arithmetic Fujita approximation.* Prépublication (2008) arXiv :0810.5479.

[CLR03] Chinburg, T. ; Lau, C.F. ; Rumely, R. *Capacity theory and arithmetic intersection theory.* Duke Math. J. 117 (2003), no. 2, 229–285.

[Dem92] Demailly, J.-P. *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory.* J. Alg. Geom **1** (1992), 361-409.

[DMR06] De Marco, L. ; Rumely, R. *Transfinite diameter and the resultant.* J. Reine Angew. Math. **611** (2007), 145–161.

[DZ] Dembo, A. ; Zeitouni, O. *Large deviations techniques and applications.* Corrected reprint of the second (1998) edition. Stochastic Modelling and Applied Probability, **38**. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[Din09] Dinew, S. *Uniqueness and stability in* $\mathcal{E}(X, \omega)$. J. Func. Anal. **256**, vol 7 (2009), 2113-2122.

[Disk73] Diskant, V. *A generalization of Bonnesen's inequalities.* Soviet Math. Dokl., **14** (1973), 1728–1731.

[Don05] Donaldson, S.K. *Some numerical results in complex differential geometry.* Preprint (2005) arXiv :math/0512625.

[Ell] Ellis, R.S. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics.* Reprint of the 1985 original. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Ful98] Fulton, W. *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GS91] Gillet, H. ; Soulé, C. *On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals.* Israel J. Math. **74** (1991) no. 2, 347–357.

[GS92] Gillet, H. ; Soulé, C. *An arithmetic Riemann-Roch theorem.* Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543.

[GZ07] Guedj, V. ; Zeriahi, A. *The weighted Monge-Ampère energy of quasipsh functions.* J. Funct. An. **250** (2007), 442-482.

[KK08] Kaveh, K. ; Khovanskii, A.G.. *Convex bodies and algebraic equations on affine varieties.* Prépublication (2008) arXiv :0804.4095.

[Laz] Lazarsfeld, R.K. *Positivity in algebraic geometry.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 49. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[LM09] Lazarsfeld, R.K. ; Mustaţă, M. *Convex bodies associated to linear series.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 5, 783–835.

[Mor09a] Moriwaki, A. *Continuity of volumes on arithmetic varieties.* J. Alg. Geom. **18** (2009), no. 3, 407–457.

[NZ83] Nguyen, T.V. ; Zeriahi, A. *Familles de polynômes presque partout bornés.* Bull. Sci. Math. (2) **107** (1983), no. 1, 81–91.

[Rum07] Rumely, R. *A Robin formula for the Fekete-Leja transfinite diameter.* Math. Ann. **337** (2007), no. 4, 729–738.

[RLV00] Rumely, R. ; Lau, C.F. ; Varley, R. *Existence of the sectional capacity.* Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000), no. 690.

[ST97] Saff, E.B.. ; Totik, V. *Logarithmic potentials with exterior fields.* Springer-Verlag, Berlin. (1997) (with an appendix by T.Bloom).

[SUZ97] Szpiro, L. ; Ullmo, E. ; Zhang, S. *Equirépartition des petits points.* Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 337–347.

[Tei82] Teissier, B. *Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry. I. Introduction to the problem.* In Seminar on Differential Geometry, pp. 85–105. Ann. Math. Stud. **102**. Princeton University Press, 1982.

[Tia90] Tian, G. *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds.* J. Diff. Geom. **32** (1) (1990), 99–130.

[Yau78] Yau, S.T. *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I.* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339–411.

[Yua08] Yuan, X. *Big line bundles over arithmetic varieties.* Invent. Math. **173** (2008), no. 3, 603–649.

[Yua09] Yuan, X. *On volumes of arithmetic line bundles II.* Preprint (2009) arXiv :0909.3680.

[Zah75] Zaharjuta, V. *Transfinite diameter, Chebyshev constants, and capacity for compacta in* $\mathbb{C}^n$. Math. USSR Sbornik **25** (1975), 350–364.

[Zel98] Zelditch, S. *Szegö kernels and a theorem of Tian*. Int. Math. Res. Notices 6 (1998), 317–331.

[Zha95] Zhang, S. *Positive line bundles on arithmetic varieties*. J. of AMS **8** no. 1 (1995), 187–221.