

NOTES COURS MMP 2014

S. BOUCKSOM

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires	1
2. Amplitude et équivalence numérique	16
3. Contractions	23
4. Normalisation	31
5. Positivité	36
6. Singularités des paires	47
7. Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg	54
8. Le «basepoint free theorem»	59
9. Le théorème du cône	63
10. Mise en oeuvre du MMP	65
Références	65
Bibliography	65

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. **Conventions et notations.** Tous les schémas considérés sont séparés et noethériens, sauf mention explicite du contraire.

- (1) Une *variété* est un schéma *intègre* de type fini sur un corps *algébriquement clos* k fixé.
- (2) On appellera simplement *idéal* d'un schéma X un sous-faisceau cohérent de \mathcal{O}_X .
- (3) Un diviseur (resp. un \mathbb{Q} -diviseur) sera toujours Cartier (resp. \mathbb{Q} -Cartier).
- (4) La *codimension* d'un point $x \in X$ d'un schéma est définie comme

$$\text{codim } x := \dim \mathcal{O}_{X,x}.$$

- (5) On appellera *fibré en droites* un faisceau inversible, et plus généralement *fibré vectoriel* un faisceau localement libre de rang fini.
- (6) Si $\pi : X \rightarrow T$ est un morphisme de schémas et L est un fibré en droites sur X , on note

$$\mathcal{R}(X/T, L) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* L^{\otimes m}$$

la \mathcal{O}_T -algèbre graduée associée.

Date: 24 juillet 2016.

(7) Si $S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S_m$ est un anneau gradué intègre, on pose

$$\mathbb{N}(S) := \{m \in \mathbb{N} \mid S_m \neq 0\},$$

qui est un semigroupe, et contient donc tous les multiples suffisamment grands du pgcd des éléments de $\mathbb{N}(S)$.

1.2. Points associés.

Définition 1.1. Un *point associé* d'un schéma X est un point $x \in X$ satisfaisant les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- (i) l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}_{X,x}$ est l'annulateur d'une fonction non nulle $f \in \mathcal{O}_{X,x}$.
- (ii) $\mathcal{O}_{X,x}$ est de profondeur 0, i.e. toute fonction $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ s'annulant en x divise 0.

Géométriquement, (ii) dit qu'un point est associé ssi on ne peut y faire passer une «hypersurface» raisonnable (i.e. un diviseur effectif local, cf. ci-dessous).

L'ensemble des points associés est fini. Ceux de codimension 0 sont les points génériques de X ; les autres sont dits *points immergés*. Un schéma réduit n'a pas de points immergés. Plus précisément :

Lemme 1.2. *Un schéma X est réduit ssi il est génériquement réduit (i.e. régulier en codimension 0) et sans point immergé.*

Une fonction (locale) $f \in \mathcal{O}_X$ divise 0 ssi elle s'annule en au moins un point associé. En outre, f est nulle ssi elle l'est dans $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$ associé. On en déduit facilement :

Lemme 1.3. *Soit $U \subset X$ un ouvert, et $j : U \rightarrow X$ l'inclusion. Sont équivalentes :*

- (i) le morphisme de restriction $\mathcal{O}_X \rightarrow j_* \mathcal{O}_U$ est injectif ;
- (ii) U est schématiquement dense ;
- (iii) U est (topologiquement) dense et contient tous les points associés de X .

En d'autres termes, si $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé, alors $X \setminus Z$ est schématiquement dense ssi Z est localement contenu dans un diviseur effectif.

1.3. Fonctions rationnelles. IDÉE : commencer plutôt par

$$K(X) := \varinjlim_{U \subset X} \mathcal{O}(U)$$

où U parcourt les ouverts schématiquement denses.

Rappelons que l'*anneau total des fractions* $K(A)$ d'un anneau A est défini comme le localisé de A par le système multiplicatif des non-diviseurs de 0.

Définition 1.4. Si X est un schéma, le faisceau \mathcal{K}_X des *germes de fonctions rationnelles* est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto K(\mathcal{O}(U)),$$

qui vient avec une injection naturelle $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{K}_X$.

L'*anneau des fonctions rationnelles* de X est défini comme $K(X) := H^0(X, \mathcal{K}_X)$.

Lemme 1.5. [Stacks, Tag 02OV] *Le faisceau \mathcal{K}_X satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{K}_{X,x} = K(\mathcal{O}_{X,x})$ pour tout $x \in X$ (et donc $\mathcal{K}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}$ lorsque x est un point associé);

(ii) pour tout ouvert affine $U \subset X$ on a

$$\mathcal{K}_X(U) = K(\mathcal{O}(U)).$$

Remarque 1.6. Ces propriétés reposent de façon essentielle sur la noethérianité de X . Des exemples de Kleiman montrent en effet qu'elles sont fausses en général pour des schémas non-localement noethériens.

Corollaire 1.7. Pour tout schéma X , on a une injection

$$K(X) \hookrightarrow \prod_{x \text{ associé}} \mathcal{O}_{X,x}.$$

De plus, une fonction rationnelle $f \in K(X)$ est inversible ssi elle ne s'annule en aucun point associé.

Lemme 1.8. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si l'image par π de tout point associé de X est un point associé de Y , alors π induit un morphisme d'espaces annelés $(X, \mathcal{K}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{K}_Y)$.

Si π est de plus propre, alors $\pi_*\mathfrak{a}$ est un idéal fractionnaire de Y pour tout idéal fractionnaire \mathfrak{a} de X .

Démonstration. Supposons d'abord que X et Y sont affines, et soit $f \in \mathcal{O}(Y)$ ne divisant pas 0. Si $f \circ \pi \in \mathcal{O}(X)$ divise 0, alors elle s'annule en un point associé x de X . Mais alors f s'annule en $y = \pi(x)$, qui est un point associé de Y par hypothèse, et ceci contredit le fait que f ne divise pas 0.

Le résultat s'obtient en faisceautisant ce qui précède. \square

Corollaire 1.9. Si $j : U \rightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert schématiquement dense, alors $i_*\mathcal{K}_U \simeq \mathcal{K}_X$. En particulier, si X n'a pas point immergé, toute fonction définie sur un ouvert dense définit une fonction rationnelle sur X .

Quand X est un schéma intègre de point générique η , $K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ est le corps des fonctions de X . Plus généralement, $K(X)$ reste simple à décrire si X n'a pas de point immergé

Proposition 1.10. Si X est un schéma sans point immergé, alors

$$K(X) \simeq \prod_{\eta \text{ générique}} \mathcal{O}_{X,\eta}.$$

En particulier, si X est réduit, $K(X)$ est le produit des corps de fonctions de ses composantes irréductibles.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $X = \text{Spec } A$ est affine (cf. [Stacks, Tag 02LX]). Le corollaire 1.9 implique que les idéaux premiers de l'anneau noethérien $K(A)$ sont les images d'idéaux premiers de A contenus dans un idéal associé de A . Mais puisque X n'a pas de point immergé, tous les idéaux associés de A sont minimaux; il s'ensuit que le spectre de $K(A)$ est fini, et le résultat suit facilement.

Dans le cas général, le cas des ouverts affines implique une décomposition analogue du faisceau \mathcal{K}_X , et le résultat suit en passant aux sections globales. \square

Définition 1.11. Un idéal fractionnaire \mathfrak{a} sur un schéma X est un sous- \mathcal{O}_X -module fini de \mathcal{K}_X . L'idéal des dénominateurs de \mathfrak{a} est défini comme

$$\{f \in \mathcal{O}_X \mid f \cdot \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X\},$$

Le sous-schéma fermé associé est appelé *schéma des pôles* de \mathfrak{a} , et noté $P(\mathfrak{a})$.

On notera que $X \setminus P(\mathfrak{a})$ est le plus grand ouvert U tel que $\mathfrak{a}|_U \subset \mathcal{O}_U$. En particulier, si $f \in K(X)$ est une fonction rationnelle, $X \setminus P(f)$ est le «domaine de définition» de f .

1.4. Diviseurs de Cartier et groupe de Picard. Le groupe des *diviseurs* (de Cartier) d'un schéma X est défini comme

$$\mathrm{Div}(X) := H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*).$$

Un diviseur est *effectif* s'il est donné par une section de $\mathcal{O}_X \cap \mathcal{K}_X^*$. Autrement dit, un diviseur effectif est un sous-schéma fermé $D \subset X$ localement défini par une fonction ne divisant pas 0. Par définition, tout diviseur est donc localement différence de diviseurs effectifs.

Remarque 1.12. Il n'est pas vrai en général qu'une union finie de diviseurs effectifs est un diviseur effectif. Plus précisément, si X est affine et intègre, cette condition a lieu ssi X est (localement) factoriel.

Si f est une section de $H^0(X, \mathcal{K}_X^*)$, on note $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(X)$ le diviseur correspondant, qui est dit *principal*.

A tout diviseur D , on associe un idéal fractionnaire $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$, défini sur tout ouvert $U \subset X$ sur lequel $D = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in H^0(U, \mathcal{K}_X^*)$ par

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{g \in K(U) \mid gf \in \mathcal{O}_X\}.$$

On notera que l'idéal des dénominateurs de f n'est autre que $\mathcal{O}_X(D) \cap \mathcal{O}_X$.

Le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ est inversible, et réciproquement tout idéal fractionnaire inversible est de cette forme.

Le *groupe de Picard*

$$\mathrm{Pic}(X) := H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

est le groupe des classes d'isomorphisme de «fibrés en droites» de X (i.e. faisceaux inversibles de rang 1). En envoyant un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ sur la classe d'isomorphie de $\mathcal{O}_X(D)$, on définit un morphisme

$$\mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(X),$$

dont on vérifie qu'il est aussi le cobord de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0.$$

En particulier, le noyau de $\mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$ est constitué des diviseurs linéairement équivalents à 0, i.e. ceux de la forme $\mathrm{div}(f)$ avec $f \in H^0(X, \mathcal{K}_X^*)$.

La surjectivité de $\mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$ revient à dire que $\mathrm{Pic}(X)$ est isomorphe aux diviseurs modulo équivalence linéaire. Elle est également équivalente au fait que tout faisceau inversible se plonge dans \mathcal{K}_X , ou encore au fait que tout fibré

en droites L admet une section rationnelle $s \in H^0(X, L \otimes \mathcal{K}_X^*)$, i.e. une section rationnelle ne s'annulant en aucun point associé (cf. corollaire 1.7°).

Proposition 1.13. *Si X est réduit (ou plus généralement sans point immergé), alors $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est surjective.*

Démonstration. La proposition 1.10 implique (après faisceautisation) que

$$H^0(X, \mathcal{K}_X \otimes L) \simeq \prod_{\xi \text{ générique}} L \otimes \mathcal{O}_{X,\xi},$$

et on peut donc spécifier une section dans $H^0(X, \mathcal{K}_X^* \otimes L)$ en choisissant simplement une section locale non-nulle de L en chaque point générique. \square

Remarque 1.14. La surjectivité de $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ est également vraie pour tout schéma affine (cf. [Eis, Corollary 11.7]), tout schéma projectif sur un corps (Nagata).

Cependant, Kleiman a donné un exemple de schéma X pour lequel la surjectivité échoue. Donc son exemple, X est propre sur \mathbb{C} , de dimension 3, avec deux points fermés immergés et tel que X_{red} est lisse (cf. [Laz, Exemple 1.1.6]).

1.5. Diviseurs de Weil et groupe de classe. Un *diviseur de Weil* sur un schéma X est par définition un cycle de codimension 1, i.e. un élément du groupe abélien libre $Z^1(X)$ sur les points de codimension 1. Un diviseur de Weil est dit *effectif* si ses coefficients sont positifs.

Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé de codimension 1 (par exemple, un diviseur effectif), on lui associe un diviseur de Weil effectif $[Y] \in Z^1(X)$ en posant

$$[Y] := \sum_{\text{codim } x=1} \text{long}(\mathcal{O}_{Y,x})[x],$$

où x parcourt l'ensemble (fini) des points génériques de Y de codimension 1.

On montre (voir par exemple [Eis, Theorem 11.10]) que la construction précédente, appliquée localement aux diviseurs effectifs, est additive sur ceux-ci, donc s'étend en un morphisme de groupes

$$\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X),$$

le *morphisme de cycle*.

Définition 1.15. Le *groupe de classe* $\text{Cl}(X)$ est défini comme le quotient de $Z^1(X)$ par l'image de $K(X)^*$ sous le morphisme de cycle $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$.

D'après le corollaire 8.2, le morphisme de cycle induit un morphisme

$$\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$$

dès que X est réduit, mais ce morphisme n'est pas injectif en général.

Exemple 1.16. Si $X \subset \mathbb{A}_k^2$ est la cubique cuspidale d'équation $(y^2 - x^3 = 0)$, alors $\text{Pic}(X) \simeq (k, +)$ (cf. exemple 4.5 ci-dessous), mais on voit facilement $\text{Cl}(X) = 0$.

Comme on le rappellera plus bas (Proposition 1.56), le morphisme de classe est cependant injectif dès que X est normal. Si X est de plus factoriel (par exemple

régulier, d'après le théorème d'Auslander-Buchsbaum), on a un isomorphisme $\text{Pic}(X) \simeq \text{Cl}(X)$.

Notons pour finir que le groupe de classe d'un ouvert est facile à décrire :

Proposition 1.17. *Si X n'a pas de points immergés, alors on a une suite exacte*

$$\bigoplus_{x \in X \setminus U, \text{codim } x=1} \mathbb{Z}[x] \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$$

pour tout ouvert dense $U \subset X$.

Exemple 1.18. Si $U \subset \mathbb{P}_k^n$ est ouvert, alors

$$\text{Cl}(U) = \text{Pic}(U) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

où m est le pgcd des degrés des composantes irréductibles de codimension 1 du complémentaire de U (et $m = 0$ si $\mathbb{P}_k^n \setminus U$ est de codimension au moins 2).

1.6. Normalité et conditions de Serre.

Définition 1.19. Un schéma X est *normal* si ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont intègres et intégralement clos dans leur corps des fractions.

Exemple 1.20. Il est élémentaire de voir qu'un anneau intègre factoriel A est intégralement clos dans son corps des fractions. Par conséquent, un schéma (localement) factoriel est normal.

Par définition, un schéma normal est réduit et localement irréductible, et ses composantes connexes sont donc intègres. Réciproquement :

Lemme 1.21. *Si X est réduit et chaque anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos dans sans anneau total des fractions $\mathcal{K}_{X,x}$, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre, et X est donc normal.*

Démonstration. Si $\mathcal{O}_{X,x}$ est réductible, la proposition 1.10 montre l'existence d'un idempotent non trivial $f \in \mathcal{K}_{X,x}$. Comme $f^2 = f$, f est entier sur $\mathcal{O}_{X,x}$, donc $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, contradiction. \square

Définition 1.22. Soit X un schéma et $k \in \mathbb{N}$.

(R_k) On dit que X est *régulier en codimension k* , noté R_k , si $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier pour tout $x \in X$ de codimension au plus k ;

(S_k) On dit que X satisfait la *condition de Serre S_k* si

$$\text{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq \min\{k, \text{codim } x\}$$

pour tout $x \in X$.

Noter que $R_k \Rightarrow R_{k-1}$ et $S_k \Rightarrow S_{k-1}$.

Exemple 1.23. R_0 signifie génériquement réduit, et $R_{\dim X}$ équivaut à régulier.

Exemple 1.24. S_0 ne dit rien, S_1 signifie sans point immergé, et $S_{\dim X}$ revient à Cohen-Macaulay.

On peut donc reformuler le lemme 1.2 en disant qu'un schéma X est réduit ssi il est R_0 et S_1 .

Lemme 1.25. *Pour tout point $x \in D$ d'un diviseur effectif, on a*

$$\text{prof}(\mathcal{O}_{D,x}) = \text{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) - 1.$$

En particulier, si X est S_k , alors D est S_{k-1} .

Géométriquement, la condition S_2 revient à une propriété d'extension de fonctions :

Proposition 1.26. *Soit X un schéma S_1 , i.e. sans point immergé. Sont équivalentes :*

- (i) X est S_2 .
- (ii) Tous les diviseurs effectifs locaux de X sont sans point immergé.
- (iii) Le schéma des pôles $P(f)$ de toute fonction rationnelle locale f est purement de codimension 1 et sans point immergé ;
- (iv) Les fonctions s'étendent à travers la codimension 2, i.e. $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_{X \setminus Z}$ est un isomorphisme pour tout fermé $Z \subset X$ de codimension au moins 2.

Remarque 1.27. Il n'est pas vrai en général que $P(f)$ est un diviseur (de Cartier). Plus précisément, si X est un schéma normal, $P(f)$ est un diviseur pour tout germe de fonction rationnelle f ssi X est factorielle (cf. proposition 1.62).

Le point-clé de la preuve de la proposition 1.26 est le suivant :

Lemme 1.28. *Soit x un point d'un schéma X . Sont équivalentes :*

- (i) x est un point associé d'un diviseur effectif local D ;
- (ii) x est un point associé du schéma des pôles $P(f)$ d'un fonction rationnelle locale f ;
- (iii) x est un point générique du schéma des pôles $P(f)$ d'un fonction rationnelle locale f , telle que $P(f)$ soit de plus réduit en x .

Le point (iii) signifie que la restriction de f à $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ admet l'unique point fermé $\{x\}$ comme schéma des pôles.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) est clair, puisque $P(1/g) = (g = 0)$ pour toute fonction $g \in \mathcal{O}_X$ ne divisant pas 0.

Supposons que (ii) est satisfait. L'idéal des dénominateurs

$$\mathfrak{a} := \{g \in \mathcal{O}_{X,x} \mid hf \in \mathcal{O}_{X,x}\}$$

étant l'idéal de $P(f)$, la définition 1.1 montre qu'il existe $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ telle que $h \notin \mathfrak{a}_x$ mais $h \cdot \mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{a}_x$. Ceci signifie que \mathfrak{m}_x est égal à l'idéal des dénominateurs de hf en x , d'où (iii) avec hf en place de f .

Pour finir, supposons que (iii) est satisfait, et écrivons $f = a/b$ avec $a, b \in \mathcal{O}_{X,x}$ et b ne divisant pas 0. On a alors $a \notin (b)$ et $a \cdot \mathfrak{m}_x \subset (b)$, ce qui signifie que \mathfrak{m}_x est annulé sur $D := (b = 0)$ par la fonction non nulle $a|_D$, et donc que x est un point associé de D , d'où (i). □

Preuve de la proposition 1.26. Le lemme 1.25 donne facilement (i) \Leftrightarrow (ii), et (ii) \Leftrightarrow (iii) résulte du lemme 1.28.

Comme X est S_1 , le corollaire 1.9 (ou la proposition 1.10) ramène (iv) au fait que $P(f)$ est purement de codimension 1 pour tout fonction rationnelle locale f . Le lemme 1.28 donne alors (iii) \Leftrightarrow (iv). □

Remarque 1.29. [Har2, Theorem 3.8] donne une caractérisation de la profondeur en terme d'annulation de la cohomologie à support, qui généralise (i) \Leftrightarrow (iv) ci-dessus.

Théorème 1.30 (Critère de Serre). *Un schéma X est normal ssi X est R_1 et S_2 .*

En particulier, un schéma régulier est normal, et la réciproque est vraie si $\dim X = 1$.

Démonstration. Supposons que X soit R_1 et S_2 . Le lemme 1.2 montre que X est réduit. D'après le lemme 3.9, il s'agit de montrer que toute fonction rationnelle locale f qui est entière sur \mathcal{O}_X a un schéma des pôles $P(f)$ vide. Comme les anneaux locaux de X en codimension 1 sont de valuation discrète, ils sont factoriels, donc intégralement clos, et f est ainsi définie en codimension 1. Mais ceci signifie que $P(f)$ est de codimension au moins 2, et donc vide par la proposition 1.26.

Réciproquement, supposons X normal, et soit $x \in X$ un point associé d'un diviseur effectif D . On va montrer que \mathfrak{m}_x est inversible, ce qui revient à dire que x est un point régulier de codimension 1 (en tant que point de X).

Le point (iii) du lemme 1.28 montre qu'il existe une fonction rationnelle locale f telle que x soit un point générique de $P(f)$, avec de plus $P(f)$ réduit en x . Ces propriétés signifient que \mathfrak{m}_x est contenu dans l'idéal des dénominateurs de f , i.e. $f \cdot \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$, et donc $f \cdot \mathfrak{m}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ ou bien $f \cdot \mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{m}_x$. Dans le premier cas, \mathfrak{m}_x est inversible, et il reste donc à exclure le second cas. Mais ce dernier implique que f est entière sur $\mathcal{O}_{X,x}$ (puisque \mathfrak{m}_x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de type fini), et donc $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ par normalité, ce qui contredit $x \in P(f)$.

D'après la proposition 1.26, on a en particulier établi que X est S_2 . De plus, comme X est réduit, par tout point $x \in X$ de codimension 1 passe un diviseur local D , dont x est nécessairement un point associé. D'après ce qu'on vient de montrer, X est en particulier régulier en x , et donc X est R_1 . □

Exemple 1.31. Si X est de dimension au moins 2 et a une unique singularité en un point fermé $x \in X$, le critère de Serre montre que X est normal ssi $\text{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq 2$. Par conséquent, si X n'est pas normal, tout diviseur effectif D passant par x a un point immergé (cf. lemme 1.25), et il existe une fonction rationnelle f sur X avec $P(f) = \{x\}$ (cf. lemme 1.28).

Un tel exemple de singularité isolée non-normale s'obtient en identifiant deux points fermés distincts p et q de \mathbb{A}_k^2 , i.e.

$$X = \text{Spec} \{f \in k[x, y] \mid f(p) = f(q)\}.$$

Exemple 1.32. Si X est un diviseur effectif d'un schéma régulier Y avec $\dim Y \geq 3$, alors X est S_2 (cf. lemme 1.25). Par conséquent, X est normal ssi il est régulier en codimension 1 (par exemple, à singularités isolées).

Le *parapluie de Whitney* $X \subset \mathbb{A}_k^3$, d'équation $(x^2 + y^2z = 0)$, est un exemple fameux de surface $X \subset \mathbb{A}_k^3$ non-normale (singulière le long de la droite $x = y = 0$).

Pour conclure cette partie, on énonce la généralisation suivante du théorème de Bertini, aussi utile qu'elle est difficile.

Théorème 1.33. *Soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ un schéma quasi-projectif sur un corps infini k . Les propriétés suivantes de X se transmettent à $X \cap H$ pour un ouvert dense d'hyperplans $H \subset \mathbb{P}_k^n$:*

- (i) R_k ;
- (ii) S_k ;
- (iii) géométriquement irréductible, si on suppose de plus $\dim X \geq 2$.

Les points (i) et (ii) sont montrés dans [Fle77, Satz 5.2], et impliquent en particulier que $X \cap H$ est réduit (resp. normal) si X l'est. Pour (iii), on renvoie à [Jou, Théorème 6.3].

1.7. Conditions géométriques.

Lemme 1.34. *Soit X un schéma de type fini sur un corps parfait k .*

- (i) X est géométriquement réduit ssi X est réduit.
- (ii) X est géométriquement normal ssi X est normal.
- (iii) X est géométriquement intègre ssi X est intègre et k est algébriquement clos dans $K(X)$.

Démonstration. Soit k'/k une extension finie. Puisque k'/k est séparable, $X_{k'} \rightarrow X$ est lisse comme changement de base d'un morphisme lisse. Les points (i) et (ii) en découlent.

Pour (iii), on suppose que X est intègre, et on pose $K := K(X)$. Comme dans [Liu, Remark 2.9], on observe d'abord que X est géométriquement intègre ssi K/k l'est. En effet, si on note η le point générique de X on a

$$K = \mathcal{O}_{X,\eta} = \varinjlim_U \mathcal{O}(U),$$

où U parcourt tous les ouverts affines de X , et donc $K \otimes_k \bar{k} = \varinjlim_U \mathcal{O}(U_{\bar{k}})$ puisque le produit tensoriel commute avec la limite directe. Il en résulte que $K \otimes_k \bar{k}$ est intègre ssi chaque $U_{\bar{k}}$ est intègre, ce qui équivaut à son tour à $X_{\bar{k}}$ intègre.

Si k'/k est une sous-extension finie non-triviale de K/k , $k' \otimes_k \bar{k}$ n'est pas connexe car k'/k est séparable, ce qui empêche $K \otimes_k \bar{k}$ d'être intègre. En d'autres termes, K/k géométriquement connexe implique k algébriquement clos dans K . Réciproquement, supposons que k est algébriquement clos dans K , et soit k'/k une extension finie. Comme k'/k est séparable, il existe $P \in k[t]$ irréductible tel que $k' \simeq k[t]/(P)$. Par platitude de K sur k , il vient

$$K \otimes_k k' \simeq K[t]/(P).$$

Mais P reste irréductible dans $K[t]$, puisque tout diviseur $A \in K[t]$ de P est à coefficients dans $\bar{k} \cap K = k$. Il en résulte que $K \otimes_k k'$ est un corps, donc en particulier intègre. \square

1.8. Morphismes dominants et applications rationnelles. Rappelons d'abord que les sous-ensembles *constructibles* d'un espace topologique X sont les éléments de l'algèbre de Boole engendrée par les ouverts, i.e. le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ qui soit stable par passage au complémentaire, union finie (et donc aussi intersection finie) et contenant les ouverts.

On vérifie que les sous-ensembles constructibles sont précisément les unions finies disjointes de sous-ensembles localements fermés.

Proposition 1.35. *Soit C un sous-ensemble constructible d'un schéma X .*

- (i) C est dense ssi il contient un ouvert dense ;
- (ii) C est un voisinage d'un point $x \in C$ ssi il contient toutes les générisations de x .
- (iii) Un point $x \in X$ est adhérent à C ssi x est la spécialisation d'un point de C .

Le point (i) est valable pour les constructibles d'un espace topologique quelconque. On voit facilement que C satisfait (ii) ssi son complémentaire satisfait (iii), pour lequel on renvoie à [Stacks, Tag 0903].

Considérons maintenant un morphisme de type fini $\pi : X \rightarrow Y$ de schémas. Un théorème de Chevalley ([EGA, IV.1.8.4] ou [Har, II.3.19]) assure alors que l'image par f de tout ensemble constructible est constructible.

Définition 1.36. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini.

- (i) π est *dominant* si $f(X)$ est dense dans Y .
- (ii) π est *surjectif en codimension k* ssi $f(X)$ contient tous les points de Y de codimension au plus k .

Si π est propre, dominant est synonyme de surjectif.

Corollaire 1.37. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini.*

- (i) π est surjectif en codimension k ssi $\pi(X)$ contient un ouvert dense U tel que $\text{codim}(X \setminus U) \geq k + 1$.
- (ii) π est dominant ssi il est surjectif en codimension 0.

Définition 1.38. Un morphisme de type fini $\pi : Y \rightarrow X$ entre schémas est *birationnel* s'il existe un ouvert dense $U \subset X$ avec $\pi^{-1}(U)$ dense tel que π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$.

Remarque 1.39. L'étude des morphismes birationnels se ramène pour l'essentiel au cas où Y (et donc X) est irréductible. En effet, soit $Y = \bigcup_i Y_i$ la décomposition irréductible d'un schéma. Si on se donne pour chaque i un morphisme birationnel $X_i \rightarrow Y_i$, alors $\coprod_i X_i \rightarrow Y$ est birationnel. Réciproquement, si $\pi : X \rightarrow Y$ est birationnel, alors $X_i := \pi^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ l'est aussi, et $\coprod_i X_i \rightarrow Y$ se factorise par π .

Exemple 1.40. Si X est génériquement réduit, le plongement fermé $X_{\text{red}} \rightarrow X$ est birationnel.

La proposition 1.10 donne immédiatement :

Lemme 1.41. *Tout morphisme birationnel $\pi : X \rightarrow Y$ avec X et Y sans point immergé induit un isomorphisme $\pi_* \mathcal{K}_X \simeq \mathcal{K}_Y$.*

Théorème 1.42 (Lemme de Chow). [EGA, II.5.6.1] *Si X est un T -schéma de type fini, il existe un morphisme birationnel projectif $X' \rightarrow X$ tel que X' soit quasi-projectif sur T (et donc projectif sur T si X est propre sur T).*

Remarque 1.43. Le lemme 1.41 est plus généralement vrai si on impose aux ouverts U et $\pi^{-1}(U)$ de la définition 1.38 d'être *schématiquement dense* (i.e. de contenir tous les points associés). Cependant, le morphisme birationnel $X' \rightarrow X$ du lemme de Chow ne satisfait pas cette condition en général.

Soit en effet X un schéma propre sur un corps tel que $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ ne soit pas surjectif (cf. remarque 1.14), et supposons qu'il existe un morphisme birationnel propre $\pi : X' \rightarrow X$ avec X' projectif sur \mathbb{C} et un ouvert schématiquement dense $U \subset X$ tel que $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme. Si L est un fibré en droites sur X , π^*L est un fibré en droites sur un schéma projectif sur \mathbb{C} , donc admet une section rationnelle $s' \in H^0(X', \mathcal{K}_{X'} \otimes \pi^*L)$ ne s'annulant pas aux points associés de X' . La restriction de s' à $\pi^{-1}(U)$ induit donc une section $s \in H^0(U, \mathcal{K}_U \otimes L)$ ne s'annulant pas aux points associés de U .

Puisque U contient tous les points associés de X , le corollaire 1.9 montre que s s'étend en une section de $H^0(X, \mathcal{K}_X \otimes L)$ ne s'annulant pas aux points associés, de sorte que L est dans l'image de $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$.

Définition 1.44. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme. Le *lieu exceptionnel* de π , noté $\text{Exc}(\pi) \subset X$, est défini comme le plus petit fermé en dehors duquel π est un isomorphisme local.

Lemme 1.45. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme. Si π est un isomorphisme local en $x \in X$, alors $\pi^* : \mathcal{O}_{Y, \pi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ est un isomorphisme, la réciproque étant vraie si π est de type fini.

Lemme 1.46. Si X est irréductible, tout morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ induit un plongement ouvert $X \setminus \text{Exc}(\pi) \rightarrow Y$.

Lemme 1.47. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel avec X intègre et Y \mathbb{Q} -factoriel (donc en particulier normal). Alors $\text{Exc}(\pi)$ est purement de codimension 1.

Démonstration. Soit $x \in X$ un point de $\text{Exc}(\pi)$, d'image $y \in Y$. Quitte à restreindre X et Y , on peut trouver un diviseur D sur Y qui n'est pas effectif en y , mais tel que π^*D soit effectif sur X .

En effet, $\pi^* : \mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ n'est pas un isomorphisme puisque $x \in \text{Exc}(\pi)$, et est injectif car π est dominant. On peut donc trouver une fonction non-nulle $f \in \mathcal{O}_{X, x}$ telle que la fonction rationnelle induite sur Y ne soit pas définie en y , et on obtient le résultat avec D le diviseur de f sur Y .

Considérons la décomposition $D = D_+ - D_-$ avec D_{\pm} diviseurs de Weil sans composante commune. Grâce à la \mathbb{Q} -factorialité de Y , on peut supposer que D_{\pm} sont des diviseurs de Cartier, quitte à remplacer D par un multiple.

Puisque D_+ et D_- sont sans composante commune, le sous-schéma

$$Z := D_+ \cap D_-$$

est de codimension 2 dans Y , et il contient y puisque D n'est pas effectif en y . Mais $\pi^*D = \pi^*D_+ - \pi^*D_-$ étant effectif, $\pi^{-1}(D_-)$ est contenu dans $\pi^{-1}(D_+)$, et $\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(D_+)$ est donc purement de codimension 1. Ceci montre que

$$x \in \pi^{-1}(Z) \subset \text{Exc}(\pi),$$

d'où le résultat. □

Définition 1.48. Une *application rationnelle* $\phi : X \dashrightarrow Y$ est une classe d'équivalence de diagrammes de morphismes de type fini $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ où $Z \rightarrow X$ est un morphisme birationnel *propre*, et $X \leftarrow Z_1 \rightarrow Y$ et $X \leftarrow Z_2 \rightarrow Y$ sont équivalents si il existe un morphisme birationnel propre $Z_3 \rightarrow X$ dominant $Z_1 \rightarrow X$ et $Z_2 \rightarrow X$ tel que les compositions $Z_3 \rightarrow Z_1 \rightarrow Y$ et $Z_3 \rightarrow Z_2 \rightarrow Y$ coïncident.

En d'autres termes, on localise la catégorie des schémas réduits et morphismes de type fini en inversant uniquement les morphismes *birationnels propres*. Cette notion d'application rationnelle correspond à celle d'application méromorphe entre espaces complexes en géométrie analytique complexe, mais n'est pas la définition standard en géométrie algébrique, qui inverse tous les morphismes birationnels, propres ou pas.

Par exemple, si $j : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert dense, alors $j^{-1} : X \dashrightarrow X$ n'est pas une application rationnelle en notre sens.

Cependant, en pratique on travaillera avec des T -schémas *propres* sur une base fixée, et dans ce cas les T -applications rationnelles en notre sens coïncideront avec la notion habituelle.

1.9. Eclatements.

Définition 1.49. Si $\mathfrak{a} \subset \mathcal{K}_X$ est un idéal fractionnaire, on définit *l'éclatement* $\pi : X' \rightarrow X$ le long de \mathfrak{a} en posant

$$X' := \text{Proj}_X \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^m \right).$$

Comme dans le cas d'idéaux ordinaires, on montre que l'idéal fractionnaire $\pi^{-1}\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ est inversible, donc de la forme $\mathcal{O}_X(-F)$ pour un unique diviseur F sur X' (qui est effectif lorsque $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ est un idéal), et que π est universel pour cette propriété.

Remarque 1.50. A quoi ressemble l'éclatement de X le long de $(f = 0)$ quand f divise zéro ?

Comme la \mathcal{O}_X -algèbre graduée $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^m$ est engendrée en degré 1, X' vient avec un fibré en droites $\mathcal{O}_{X'}(1)$, très ample relativement à π , qui est de plus isomorphe à $\mathcal{O}_{X'}(-F)$.

Si X est réduit (resp. intègre), X' l'est aussi.

Remarque 1.51. Localement sur X (resp. globalement si X admet un fibré en droites ample), l'éclatement d'un idéal fractionnaire peut-être réalisé comme l'éclatement d'un idéal ordinaire. Il suffit en effet de choisir une section locale f de \mathcal{K}_X^* telle que $f \cdot \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ (resp. une section globale de l'idéal des dénominateurs de \mathfrak{a} tordu par une grande puissance d'un fibré ample).

Remarque 1.52 (L'éclatement comme graphe). Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement d'une variété affine $X = \text{Spec } A$ le long d'un sous-schéma fermé $Y \subset X$, d'idéal $I \subset A$. Par définition, la donnée de générateurs (f_1, \dots, f_n) de I réalise un plongement fermé de \tilde{X} dans $X \times \mathbb{P}_k^{n-1} = \mathbb{P}_A^{n-1}$, dual du morphisme surjectif d'algèbres graduées $A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} I^m$ qui envoie t_i sur f_i .

Puisque π est un isomorphisme au dessus de $X \setminus Y$, il induit un morphisme $F : X \setminus Y \rightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$, qui n'est autre que $x \mapsto [f_1(x) : \dots : f_n(x)]$. Mais l'ouvert $\pi^{-1}(X \setminus Y)$ est dense dans \tilde{X} (celle-ci étant intègre), et on conclut que \tilde{X} coïncide avec le graphe de l'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$ ayant les f_i comme composantes homogènes.

Lemme 1.53. *Tout morphisme birationnel projectif $\pi : X' \rightarrow X$ entre schémas sans points associés est l'éclatement d'un idéal fractionnaire.*

La projectivité signifie ici l'existence d'un fibré relativement ample.

Démonstration. Par le corollaire 8.2, on peut trouver un diviseur D sur X' qui soit suffisamment ample relativement à π pour que la \mathcal{O}_X -algèbre graduée

$$\mathcal{R}(X'/X, D) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_{X'}(mD)$$

soit engendrée en degré 1, et on a alors

$$X' \simeq \text{Proj}_X \mathcal{R}(X'/X, D).$$

Comme π est birationnel, le lemme 1.41 donne un isomorphisme naturel $\pi_* \mathcal{K}_{X'} \simeq \mathcal{K}_X$, de sorte que $\mathfrak{a}_m := \pi_* \mathcal{O}_{X'}(mD)$ est un idéal fractionnaire pour tout m . Comme $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_1^m$, on conclut donc que π est isomorphe à l'éclatement de X le long de \mathfrak{a}_1 . \square

Exemple 1.54. Eclatement de Y dans X , avec Y et X lisse.

Exemple 1.55 (Eclatement du sommet d'un cône). [EGA, II.8.7.7] Soit (X, L) un T -schéma polarisé, i.e. un T -schéma projectif muni d'un fibré en droites relativement ample. Sont équivalentes :

- (i) L'éclatement du cône sur T

$$C(X/T, L) := \text{Spec } \mathcal{R}(X/T, L)$$

le long du sous-schéma des sommets est isomorphe à la projection canonique de l'espace total de L^* sur $C(X/T, L)$.

- (ii) $S^m \pi_* \mathcal{O}_X(L) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(mL)$ est surjective pour tout $m \gg 1$ (ceci étant par exemple satisfait si L est très ample).

Si tel est le cas, le diviseur exceptionnel E de l'éclatement s'identifie de plus à la section nulle de L^* .

1.10. Diviseurs sur un schéma normal.

Proposition 1.56. *Si X est un schéma normal, alors un diviseur $D \in \text{Div}(X)$ est effectif ssi le diviseur de Weil associé l'est.*

En particulier, $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$ et $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Cl}(X)$ sont injectifs.

Lemme 1.57. *Si X est régulier en codimension 1, $Y \mapsto [Y]$ identifie les sous-schémas fermés purement de codimension 1 et sans point immergé avec les diviseurs de Weil effectifs.*

Démonstration. L'idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ d'un sous-schéma fermé purement de codimension 1 et sans point immergé est uniquement déterminé par ses valeurs aux points $x \in X$ de codimension 1 de X . Puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète, on a $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{m}_x^l$ avec $l = \text{long}(\mathcal{O}_{Y,x})$, d'où le résultat. \square

Preuve de la proposition 1.56. D'après le critère de Serre, X est régulier en codimension 1 et S_2 , ce qui signifie que les diviseurs effectifs sont sans point immergé (proposition 1.26). Le résultat découle donc du lemme 1.57. \square

A partir de maintenant, si X est normal, on identifiera diviseurs de Weil effectifs et sous-schémas purement de codimension 1 sans point immergé. En particulier, le schéma des pôles $P(\mathfrak{a})$ d'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a} \subset \mathcal{K}_X$ sera vu comme un diviseur de Weil effectif.

Définition 1.58. Si D est un diviseur de Weil sur un schéma normal X , on définit un idéal fractionnaire $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$ en posant

$$\mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in K(U) \mid D + \text{div}(f) \geq 0\}$$

pour tout ouvert U .

Noter que la condition $D + \text{div}(f) \geq 0$ équivaut à $P(f) \leq D$, où l'on voit le schéma des pôles $P(f)$ comme un diviseur de Weil effectif (cf. lemme 1.57).

Rappelons qu'une *valuation réelle* (ou *de rang 1*) sur un corps K est un morphisme de groupes $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$. Par commodité, on pose $v(0) = +\infty$. On appelle $v(K^*)$ le *groupe des valeurs* de v .

Définition 1.59. Soit X un schéma intègre. Une *valuation réelle sur X* est une valuation réelle sur $K(X)$ qui admet un *centre* sur X , i.e. un point $x \in X$ tel que $v \geq 0$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$ et $v > 0$ sur \mathfrak{m}_x . D'après le critère valuatif de séparation, le centre est unique ; on le note $c_X(v)$.

Si $\pi : X' \rightarrow X$ est un morphisme birationnel propre avec X' intègre, toute valuation réelle v sur X se relève en une valuation sur X' , par le critère valuatif de propriété. On a de plus $\pi(c_X(v)) = c_{X'}(v)$, et donc

$$\text{codim } c_{X'}(v) \leq \text{codim } c_X(v).$$

Exemple 1.60. Une *valuation divisorielle* est une valuation v pour laquelle il existe un morphisme birationnel propre $X' \rightarrow X$ et un point régulier de codimension $x \in X'$ tel que $v = \text{ord}_x$, la valuation discrète de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. On écrira aussi $v = \text{ord}_E$, avec $E \subset X'$ l'adhérence de x .

Si v est une valuation sur X et $\mathfrak{a} \subset \mathcal{K}_X$ est un idéal fractionnaire, on pose

$$v(\mathfrak{a}) := \min\{v(f) \mid f \in \mathfrak{a}_x\}$$

avec $x = c_X(v)$. Pour tout choix de générateurs f_i de \mathfrak{a}_x , on a en fait $v(\mathfrak{a}) = \min_i v(f_i)$. Si \mathfrak{b} est un deuxième idéal fractionnaire, on vérifie facilement que

$$v(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = v(\mathfrak{a}) + v(\mathfrak{b})$$

et

$$v(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \min\{v(\mathfrak{a}), v(\mathfrak{b})\}.$$

Lemme 1.61. *Soit \mathfrak{a} un idéal fractionnaire sur une variété affine X , et v_i un nombre fini de valuations réelles sur X . Alors il existe $f \in H^0(X, \mathfrak{a})$ telle que $v_i(f) = v_i(\mathfrak{a})$ pour tout i .*

Démonstration. Soient f_1, \dots, f_n des générateurs globaux de \mathfrak{a} . Pour chaque valuation v ,

$$\left\{ (c_1, \dots, c_n) \in k^n \mid v \left(\sum_j c_j f_j \right) > v(\mathfrak{a}) \right\}$$

est un sous-espace vectoriel strict de k^n . Le résultat suit puisque k est infini (étant algébriquement clos). \square

Proposition 1.62. *Soit X une variété affine normale. Pour tout diviseur de Weil effectif D , il existe une fonction rationnelle f telle que $P(f) = D$.*

Démonstration. Soit $D = \sum_i a_i D_i$ la décomposition irréductible de D , et posons $\mathfrak{a} := \mathcal{O}_X(D)$. Puisque X est régulier au point générique de D_i , on voit facilement que $\text{ord}_{D_i}(\mathfrak{a}) = -a_i$. D'après le lemme 1.61, on peut donc trouver $f \in H^0(X, \mathfrak{a})$ telle que $\text{ord}_{D_i}(f) = -a_i$ pour tout i . Ceci signifie que $D + \text{div}(f) \geq 0$ n'a pas de composante commune avec D , et donc que $P(f) = D$. \square

Lemme 1.63. *Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre schéma normaux, et D un diviseur de Weil sur Y . Alors on a une inclusion d'idéaux fractionnaires*

$$\pi_* \mathcal{O}_Y(D) \subset \mathcal{O}_X(\pi_* D).$$

En particulier, tout diviseur de Weil D effectif et π -exceptionnel satisfait

$$\pi_* \mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X.$$

Démonstration. Soit f une fonction rationnelle locale sur X . En terme valuatifs, dire que $f \in \pi_* \mathcal{O}_Y(D)$ signifie que $\text{ord}_E(\pi^* f) \geq -\text{ord}_E(D)$ pour toute composante E de D , et $\text{ord}_E(\pi^* f) \geq 0$ pour tout autre diviseur premier $E \subset Y$. Ceci implique que $\text{ord}_F(f) \geq -\text{ord}_F(\pi_* D)$ pour toute composante F de $\pi_* D$, et $\text{ord}_F(f) \geq 0$ pour tout autre diviseur premier $F \subset X$, i.e. $f \in \mathcal{O}_X(D)$.

Si D est effectif et π -exceptionnel alors

$$\mathcal{O}_X = \pi_* \mathcal{O}_Y \subset \pi_* \mathcal{O}_Y(D) \subset \mathcal{O}_X(\pi_* D) \subset \mathcal{O}_X.$$

\square

Le résultat est faux si X n'est pas normal.

Exemple 1.64. Soit $0 \in X$ une singularité isolée de surface non normale (i.e. non S_2) et $\pi : Y \rightarrow X$ est l'éclatement normalisé de 0 , de diviseur exceptionnel F , alors il existe $m \geq 1$ tel que $\pi_* \mathcal{O}_Y(mF) \neq \mathcal{O}_X$ d'après l'exemple 1.31).

A titre culturel, on donne aussi :

Théorème 1.65. *[Inégalité d'Abhyankar] Pour toute valuation réelle v sur un schéma intègre X , le groupe des valeurs $\Gamma_v := v(K(X)^*) \subset \mathbb{R}$ satisfait*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \leq \text{codim } c_X(v).$$

Démonstration. On résume [ZS, Appendix II]. Posons $x = c_X(v)$, $d := \dim \mathcal{O}_{X,x}$, et soient $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}_x$ avec $v(f_1), \dots, v(f_r) \in \mathbb{R}_+$ soient \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Il s'agit de montrer que $r \leq d$.

En notant $\{v \geq n\} \subset \mathfrak{m}_x$ les idéaux de valuation, on obtient facilement l'estimée

$$\lg(\mathcal{O}_{X,x}/\{v \geq n\}) \geq \text{card} \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^r \mid \sum_i \alpha_i v(f_i) < n \right\},$$

qui croît comme n^r lorsque $n \rightarrow +\infty$. Mais puisque $v > 0$ sur \mathfrak{m}_x , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}_x^k \subset \{v \geq 1\}$, donc $\mathfrak{m}_x^{kn} \subset \{v \geq n\}$ pour tout $n \geq 1$. Ceci implique que

$$\lg(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{kn}) \geq \lg(\mathcal{O}_{X,x}/\{v \geq n\})$$

croît au moins comme n^r . Mais ta théorie des multiplicités locales énonce que

$$\lg(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^n) = e \frac{n^d}{d!} + O(n^{d-1}),$$

avec $e \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité d'Hilbert-Samuel, et on obtient donc $r \leq d$. \square

2. AMPLITUDE ET ÉQUIVALENCE NUMÉRIQUE

2.1. Amplitude. Rappelons d'abord la version «absolue» de la notion d'amplitude

Définition 2.1. Un fibré en droites L sur un schéma X est *ample* si pour chaque faisceau cohérent \mathcal{F} , il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mL)$ soit globalement engendré pour tout $m \geq m_0$.

Si L est un fibré en droites ample sur X , il est immédiat de voir que la restriction de L à tout sous-schéma fermé de X reste ample. Si $U \subset X$ est ouvert, tout faisceau cohérent sur U est la restriction d'un faisceau cohérent sur X [Har, II.5.15], et il en résulte que la restriction de L à U est aussi ample.

D'après [EGA, II.4.5.13], L est ample sur X ssi $L|_{X_{\text{red}}}$ est ample. Notons que le fibré trivial est ample si X est affine, et donc aussi si X est quasi-affine.

Lemme 2.2. *Si L est un fibré en droites ample sur un schéma X , alors il existe $m \geq 1$ et un nombre fini de sections $s_i \in H^0(X, mL)$ telles que les ouverts $\{s_i \neq 0\}$ soient affines et recouvrent X .*

La réciproque est également vraie, cf. [EGA, II.4.5.5].

Démonstration. Soit $x \in X$ et $U \subset X$ un voisinage affine de x . Si on note $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de $X \setminus U$, on peut trouver $m \geq 1$ et $s \in H^0(X, \mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_X(mL))$ ne s'annulant pas en x . Mais alors $\{s \neq 0\} \subset U$ est un ouvert affine contenant x , et on conclut aisément par noethérianité. \square

Passons maintenant à l'amplitude relative.

Définition 2.3. Soit $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme de type fini de schémas. Un fibré en droites L sur X est :

- (i) *T-très ample* si chaque point de T admet un voisinage U et un plongement localement fermé $j : \pi^{-1}(U) \hookrightarrow \mathbb{P}_U^N$ tel que $L = j^*\mathcal{O}(1)$.

- (ii) T -ample si mL est T -très ample pour tout $m \gg 1$ (ou, de façon équivalente, s'il existe $m \geq 1$ avec cette propriété).

Ainsi définie, l'amplitude relative est une notion locale sur la base, préservée par tout changement de base. Il est également clair que pour tout fibré en droites M sur T , L est T -(très) ample ssi $L + \pi^*M$ l'est.

Le résultat suivant donne une description globale de l'amplitude relative.

Lemme 2.4. [EGA, II.4.4.7]. *Soit $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme de type fini et L un fibré en droites sur X . Alors L est T -très ample ssi il existe une \mathcal{O}_T -algèbre graduée de type fini \mathcal{S} engendrée en degré 1 et un plongement ouvert dense $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ avec $\overline{X} = \text{Proj}_T \mathcal{S}$, tel que $L = j^*\mathcal{O}(1)$*

En particulier, X admet un fibré T -ample ssi il est quasi-projectif sur T .

Démonstration. Si X admet un plongement ouvert dense comme dans le lemme, il est immédiat de voir que L est très ample.

Réciproquement, supposons que L soit T -très ample. Par définition, on peut trouver un recouvrement fini de X par des ouverts U_i et des sections $(s_{ij})_{0 \leq j \leq N_j}$ de $L|_{f^{-1}(U_i)}$ telles que le morphisme associé $f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{P}_{U_i}^N$ soit un plongement localement fermé. Si on note \mathcal{F}_i le \mathcal{O}_{U_i} -module engendré par les s_{ij} à i fixé, alors \mathcal{F}_i est un sous-module fini de la restriction à U_i du module quasi-cohérent f_*L . D'après [EGA, I.9.4.7], il existe donc un sous \mathcal{O}_T -module fini \mathcal{E}_i de f_*L tel que $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i|_{U_i}$. La somme des \mathcal{E}_i est un sous-module cohérent $\mathcal{E} \subset f_*L$, et on vérifie facilement qu'il existe un plongement localement fermé $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tel que $L = j^*\mathcal{O}(1)$. Le résultat suit en prenant $\overline{X} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'adhérence de $j(X)$, et \mathcal{S} l'image de $\text{Sym } \mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}(Z/T, \mathcal{O}(1))$. \square

Le résultat suivant fait le lien entre les versions absolues et relatives de l'amplitude.

Théorème 2.5. [EGA, II.4.6.13] *Soit $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme de type fini tel que T admette un fibré en droites ample H , et soit L un fibré en droites sur X . Sont équivalentes :*

- (i) L est T -ample ;
- (ii) il existe $a \geq 1$ tel que $L + a\pi^*H$ est ample.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii). On suppose L T -ample. Pour montrer (ii), on peut remplacer L par un grand multiple et supposer que L est T -très ample. D'après le lemme, il existe donc une \mathcal{O}_T -algèbre graduée de type fini \mathcal{S} engendrée en degré 1 et un plongement ouvert dense $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ avec $\overline{X} = \text{Proj}_T \mathcal{S}$ et tel que $L = j^*\mathcal{O}_{\overline{X}}(1)$. Puisque H est ample, on peut choisir $a \geq 1$ tel que $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{O}_T(aH)$ soit globalement engendré.

Puisque $\mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{O}_T(aH)$ est globalement engendré sur T , il existe une surjection

$$\mathcal{O}_T(-aH)^{\oplus N+1} \rightarrow \mathcal{S}_1$$

qui induit un plongement fermé $i : \overline{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_T^N$ tel que

$$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_T^N}(1) = \mathcal{O}_{\overline{X}}(1) + a\pi^*H,$$

avec $\bar{\pi} : \bar{X} \rightarrow T$ le morphisme structural. Puisque la restriction d'un fibré en droites ample à un sous-schéma ouvert ou fermé est ample, on est ramené au cas $X = \mathbb{P}_T^N$ et $L = \mathcal{O}(1)$, pour lequel on adapte l'argument de [Har, II.5.17].

Quitte à remplacer L par un multiple, on peut supposer X recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $U_i = \{s_i \neq 0\}$ avec $s_i \in H^0(X, L)$. On va montrer que $\mathcal{O}(1) + \pi^*L$ est ample. Etant donné un faisceau cohérent \mathcal{F} sur \mathbb{P}_X^N , il s'agit de montrer que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(mL)$ est globalement engendré pour tout $m \gg 1$.

Puisque U_i est affine, il existe des sections $(t_{ij})_{0 \leq j \leq N}$ de $\mathcal{O}(1)$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ correspondant aux coordonnées homogènes de $\mathbb{P}_{U_i}^N$. La restriction de \mathcal{F} à chaque ouvert affine $\{t_{ij} \neq 0\}$ est engendré par un nombre fini de sections s_{ijk} . En appliquant [Har, II.5.14] à chaque $f^{-1}(U_i)$ puis à X , on voit que, pour tout $m \gg 1$, les $\pi^*s_i^m t_{ij}^m s_{ijk}$ s'étendent en des sections globales de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(mL)$ qui engendrent ce dernier par construction.

Puisque l'amplitude relative est locale sur la base, la preuve de (ii) \Rightarrow (i) se ramène au cas où T est affine et $H = 0$, pour lequel on renvoie à [EGA, II.4.5.10]. \square

Corollaire 2.6. *Soit $g : Y \rightarrow X$ un morphisme de T -schémas de type fini, L un fibré T -ample sur X et M un fibré X -ample sur Y . Alors il existe $a \geq 1$ tel que $M + g^*(aL)$ soit T -ample.*

*En particulier, si g est quasi-affine, alors g^*L est T -ample.*

Supposons désormais que X est un T -schéma propre. On dispose alors de la caractérisation cohomologique suivante de l'amplitude :

Proposition 2.7. [EGA, III.2.6.1] *Soit X un T -schéma propre, de morphisme structural $\pi : X \rightarrow T$, et L un fibré en droites sur X . Sont équivalentes :*

- (i) L est T -ample ;
- (ii) pour tout \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} on a

$$R^q \pi_* (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mL)) = 0$$

pour tout $m \gg 1$ et tout $q \geq 1$.

- (iii) Pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$, on a

$$R^1 \pi_* (\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_X(mL)) = 0$$

pour tout $m \gg 1$.

En utilisant ce résultat, on montre comme dans [Har3, Proposition 4.3] :

Proposition 2.8. *Si L est un fibré en droites sur un T -schéma propre X , alors L est T -ample ssi sa restriction à chaque composante irréductible de X (munie de sa structure réduite) est T -ample.*

On conclut cette partie avec le résultat crucial suivant, qui ramène l'étude de l'amplitude relative à un morphisme propre au cas des schémas propres sur un corps.

Théorème 2.9. [EGA, III₁, 4.7.1] *Soit $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre et L un fibré en droites sur X . Si $L|_{X_t}$ est ample pour un $t \in T$, alors il existe un voisinage ouvert U de t tel que $L|_{\pi^{-1}(U)}$ soit U -ample.*

Démonstration. Supposant d'abord que t est un point fermé, on va montrer que tout faisceau cohérent \mathcal{F} défini au voisinage de X_t satisfait

$$(2.1) \quad R^q \pi_* (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mL))_t = 0$$

pour tout $q \geq 1$ et $m \gg 1$. D'après le théorème des fonctions formelles, ceci revient à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$H^q (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_j}(mL)) = 0$$

pour tout $q \geq 1$, $m \geq N$ et tout $j \geq N$, où X_j est le j -ème voisinage infinitésimal de X_t , d'idéal $\mathfrak{m}_t^{j+1} \mathcal{O}_X$. A j fixé, ceci résulte de l'amplitude de $L|_{X_j}$, qui est impliquée par celle de $L_{X_j, \text{red}}$.

Afin d'obtenir l'uniformité de N par rapport à j , on introduit le cône tangent

$$T' := \text{Spec} \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_t^j / \mathfrak{m}_t^{j+1} \right),$$

qui vient avec un morphisme $T' \rightarrow T$. On pose $X' := X \times_T T'$, et on note \mathcal{F}' le $\mathcal{O}_{X'}$ -module induit par \mathcal{F} . Notons que le morphisme $f' : X' \rightarrow T'$ est aussi le changement de base de $X_t \rightarrow \text{Spec } k(t)$, de sorte que le fibré en droites L' induit par L sur X' est T' -ample. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$R^q f'_* (\mathcal{F}' \otimes \mathcal{O}_{X'}(mL')) = 0$$

pour $q \geq 1$ et $m \geq N$. Après identifications, ceci signifie que

$$H^q \left(\left(\mathcal{F} \mathfrak{m}_t^j / \mathcal{F} \mathfrak{m}_t^{j+1} \right) \otimes \mathcal{O}_X(mL) \right) = 0$$

pour $q \geq 1$, $m \geq N$ et $j \in \mathbb{N}$. La suite exacte longue de cohomologie associée à

$$0 \rightarrow \left(\mathcal{F} \mathfrak{m}_t^j / \mathcal{F} \mathfrak{m}_t^{j+1} \right) \otimes \mathcal{O}_X(mL) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_j}(mL) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_{j-1}}(mL) \rightarrow 0$$

montre donc que le morphisme de restriction

$$H^q (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_j}(mL)) \rightarrow H^q (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_{j-1}}(mL))$$

est un isomorphisme pour $q \geq 1$, $m \geq N$ and $j \geq 1$. Ceci donne résultat recherché, puisque $H^q (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_0}(mL)) = 0$ pour $q \geq 1$ et $m \gg 1$ amplitude de L sur $X_t = X_0$.

Revenons maintenant au cas général. Ce qui précède s'applique à $X \times_T T_t$, et (5.2) implique que L est T_t -ample sur $X \times_T T_t$, d'après la proposition 2.7. Quitte à remplacer L par mL avec $m \gg 1$, on peut donc supposer que L est T_t -très ample sur $X \times_T T_t$. Il existe donc des sections s_0, \dots, s_n de $f_* \mathcal{O}_X(mL)_t$ n'ayant pas de zéros commun sur X_t , et donc sur un voisinage U de t . Ces sections définissent un morphisme $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}_U^n$ tel que

$$(2.2) \quad \phi^* \mathcal{O}(1) = mL|_{f^{-1}(U)}$$

Puisque ϕ est un plongement sur X_t , il reste un plongement au dessus d'un voisinage V de t , ce qui montre que $L|_{f^{-1}(V)}$ est V très ample \square

Corollaire 2.10. *Soit L un fibré en droites sur un T -schéma propre X . Alors :*

- (i) L est T -ample ssi $L|_{X_t}$ est ample pour tout $t \in T$;
- (ii) L 'ensemble des $t \in T$ tel que $L|_{X_t}$ est ample est un ouvert.

Il suffit de plus de restreindre aux points $t \in T$ fermés dans (i).

Le dernier point résulte du fait que T est le seul ouvert contenant tous les points fermés. Autrement dit, tout point de T possède un point fermé dans son adhérence, ce qui résulte aisément de la noethérianité de T .

Corollaire 2.11. *Soit L un fibré en droites sur un T -schéma propre, et $T' \rightarrow T$ un morphisme surjectif. Alors L est T -ample ssi son tiré en arrière sur $X \times_T T'$ est T' -ample.*

Démonstration. Si $T' \rightarrow T$ est fidèlement plat, ceci résulte de la caractérisation cohomologique de l'amplitude relative, puisque les images directes supérieures commutent aux changements de base plats.

Le corollaire 2.10 ramène le cas général au cas d'une extension de corps, qui est fidèlement plate. \square

2.2. Critère de Nakai-Moishezon. Dans cette partie, X est un schéma propre sur un corps k , et on note n sa dimension.

Si L_1, \dots, L_n sont des fibrés en droites sur X , on montre que la caractéristique d'Euler

$$\chi(\mathcal{O}_X(m_1 L_1 + \dots + m_n L_n))$$

est un polynôme de degré au plus n en les $m_i \in \mathbb{Z}$, dont le coefficient du monôme $m_1 \dots m_n$ est par définition le *nombre d'intersection* des L_i , noté

$$(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot X) \in \mathbb{Z},$$

ou simplement $(L_1 \cdot \dots \cdot L_n)$ lorsqu'il n'y a pas lieu de préciser X . On montre que

$$(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot X) = \sum_i \lg(\mathcal{O}_{X, \eta_i})(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot X_i),$$

où les X_i sont les composantes irréductibles de X de dimension n (avec leur structure réduite) et $\eta_i \in X_i$ est le point générique.

Théorème 2.12 (Nakai-Moishezon). *Soit X un schéma propre sur un corps k , et L un fibré en droites sur X . Alors L est ample ssi $(L^{\dim Y} \cdot Y) > 0$ pour tout sous-schéma $Y \subset X$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $n = \dim X$. D'après la proposition 2.8, on peut supposer que X est intègre, de sorte qu'il existe un diviseur D tel que $L = \mathcal{O}_X(D)$. Soit D_{\pm} le schéma des pôles de $\pm D$, d'idéal

$$\mathfrak{a}_{\pm} := \mathcal{O}_X(\pm D) \cap \mathcal{O}_X.$$

Par hypothèse de récurrence, $L|_{D_{\pm}}$ est ample. On a donc $h^q(\mathcal{O}_{D_{\pm}}(mL)) = 0$ pour tout $q \geq 1$, et la suite exacte longue de cohomologie de

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathfrak{a}_{\pm} \rightarrow \mathcal{O}_X(mL) \rightarrow \mathcal{O}_{D_{\pm}}(mL) \rightarrow 0$$

donne

$$h^q(mL) = h^q(\mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathfrak{a}_{\pm})$$

pour $q \geq 2$ et $m \gg 1$. Mais on a

$$L \otimes \mathfrak{a}_{-} = \mathcal{O}_X(D) \otimes (\mathcal{O}_X(-D) \cap \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(D) \cap \mathcal{O}_X = \mathfrak{a}_{+},$$

d'où

$$h^q(mL) = h^q(\mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathfrak{a}_-) = h^q(\mathcal{O}_X((m-1)L) \otimes \mathfrak{a}_+) = h^q((m-1)L)$$

pour $q \geq 2$ et $m \gg 1$; on en déduit que $h^q(mL)$ reste borné lorsque $m \rightarrow +\infty$, pour tout $q \geq 2$.

Par Riemann-Roch asymptotique, on a donc

$$h^0(mL) - h^1(mL) + O(1) = \frac{(L^n)}{n!} m^n + O(m^{n-1}),$$

ce qui montre que $h^0(mL) > 0$ pour $m \gg 1$, et permet donc de supposer que D est effectif (après avoir remplacé L par mL).

Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X((m-1)L) \rightarrow \mathcal{O}_X(mL) \rightarrow \mathcal{O}_D(mL) \rightarrow 0.$$

Puisque L_D est ample, on a $H^1(\mathcal{O}_D(mL)) = 0$ pour $m \gg 1$, d'où la surjectivité de $H^1((m-1)L) \rightarrow H^0(mL)$ pour tout $m \gg 1$ par la suite exacte longue de cohomologie. Il en résulte que $h^0((m-1)L) = h^1(mL)$ pour $m \gg 1$, de sorte que $H^1((m-1)L) \rightarrow H^1(mL)$ est aussi injectif pour $m \gg 1$. La suite exacte longue de cohomologie donne donc la surjectivité du morphisme de restriction $H^0(\mathcal{O}_X(mL)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D(mL))$. Puisque D est le diviseur d'une section de L , l'ensemble base de mL est contenu dans D . Comme $mL|_D$ est sans point base pour $m \gg 1$, il en résulte que mL est sans point base pour $m \gg 1$.

Le morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}H^0(mL)$ correspondant satisfait $\pi^*\mathcal{O}(1) = L$, et donc $(L^{\dim Y} \cdot Y) = 0$ pour toute fibre Y de π , ce qui montre que $\dim Y = 0$. On a donc montré que π est fini, et l'amplitude de $\mathcal{O}(1)$ implique donc celle de L . \square

Remarque 2.13. Il n'est pas suffisant de prendre Y de dimension 1 dans le théorème précédent (cf. exemple de Mumford).

2.3. Fibrés nef. Soit X un schéma propre sur un corps.

Définition 2.14. Un fibré en droites L sur X est *nef* si $L \cdot C \geq 0$ pour toute courbe intégrale $C \subset X$.

Si L et M sont deux fibrés en droites tels que $mL + M$ est nef pour tout $m \gg 1$, alors il est clair que L est nef. La formule de projection montre également que le tiré en arrière d'un fibré nef par n'importe quel morphisme de T -schémas propres reste nef.

Théorème 2.15. [Kle66, p.320, Theorem 1] *Si L_1, \dots, L_n sont des fibrés en droites nef, alors $(L_1 \cdot \dots \cdot L_n) \geq 0$.*

En conjuguant ceci au critère de Nakai-Moishezon, on obtient facilement :

Corollaire 2.16. *Si L est un fibré en droites sur X , alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) L est nef;
- (ii) $mL + H$ est ample pour tout fibré en droites ample H et tout $m \geq 1$.

Définition 2.17. Soit $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre de schémas, et L un fibré en droites sur X . On dit que :

- (i) L est π -nef si $L|_{X_t}$ est nef pour tout $t \in T$.
- (ii) L est π -numériquement trivial si $\pm L$ est π -nef.

Il suffit en fait de considérer les fibres *fermées* dans (i), grâce aux corollaires 2.10 et 2.16. En d'autres termes, un fibré en droites L est f -nef (resp. f -numériquement trivial) ssi $L \cdot C \geq 0$ (resp. $L \cdot C = 0$) pour toute courbe intégrale $C \subset X$ telle que $\pi(C)$ soit un point fermé.

Proposition 2.18. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme de T -schémas propres et L est un fibré en droites sur Y . Si L est nef, alors π^*L l'est aussi, et la réciproque est vraie lorsque π est surjectif.*

C'est une conséquence immédiate du fait suivant :

Lemme 2.19. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme propre surjectif de schémas. Pour toute courbe intégrale C de Y , il existe une courbe intégrale $C' \subset X$ telle que $\pi(C') = C$.*

(AJOUTER LEMME GENERAL SUR SURJECTIVITE AU NIVEAU DES CYCLES ?)

Démonstration. Par le lemme de Chow, on peut supposer que π est projectif, et on obtient alors aisément le résultat en prenant des sections hyperplanes successives de $\pi^{-1}(C)$ pour ramener sa dimension à 1. \square

Lemme 2.20. *Si $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre et plat de schémas, et si on note n la dimension commune des fibres, alors*

$$t \mapsto (L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot X_t)$$

est localement constante sur T pour tous fibrés en droites L_1, \dots, L_n sur X .

2.4. Le théorème de la base.

Définition 2.21. Si X est un T -schéma propre, on note $N^1(X/T)$ (resp. $N_1(X/T)$) le quotient de $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ (resp. des \mathbb{R} -cycles de dimension verticaux pour T) par l'équivalence numérique .

Par construction, on a donc une application bilinéaire non-dégénérée

$$(2.3) \quad N^1(X/T) \times N_1(X/T) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème 2.22. [Kle66, Kee] *Si X est un T -schéma propre, alors $N^1(X/T)$ est de dimension finie.*

On appelle *nombre de Picard* de X/T , noté $\rho(X/T)$, la dimension commune de $N^1(X/T)$ et de $N_1(X/T)$, qui sont en dualité via (2.3).

Démonstration. Il est aisé de se ramener au cas où X et T sont intègres et $X \rightarrow T$ est projectif surjectif. On procède alors par récurrence noethérienne, ce qui permet de remplacer T par un ouvert.

Le lemme ?? permet de supposer que $X \rightarrow T$ est plat, à fibres géométriquement intègres. Le lemme 2.23 montre alors que $N^1(X/T) \rightarrow N^1(X_\eta)$ est injectif, ce qui ramène finalement au cas où T est un corps algébriquement clos, traité dans [Kle66]. \square

Lemme 2.23. *Si $X \rightarrow T$ est un morphisme projectif surjectif plat et à fibres géométriquement intègres, alors*

$$N^1(X/T) \rightarrow N^1(X_t/\kappa(t))$$

est injectif pour tout $t \in T$.

Ceci est faux en général si $X \rightarrow T$ n'est pas à fibres géométriquement intègre.

Exemple 2.24. Supposons que X soit régulier, et que T est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Si D est un diviseur de X porté par la fibre spéciale X_0 , alors D est évidemment numériquement trivial sur la fibre générique. Cependant, on montre que D est numériquement trivial ssi il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $D = cX_0$.

Lemme 2.25. *Si X est projectif sur T , alors $\rho(X/T) = 0$ ssi $X \rightarrow T$ est fini.*

2.5. Critère de Kleiman-Seshadri.

Proposition 2.26. *Pour tout morphisme de T -schémas projectifs $\pi : X \rightarrow Y$, on a*

$$\overline{NE}(X/T) \cap N_1(X/Y) = \overline{NE}(X/Y).$$

Démonstration. Puisque qu'une courbe dans une fibre de $X \rightarrow Y$ est à fortiori dans une fibre de $X \rightarrow T$, il est clair que $\overline{NE}(X/Y)$ est contenu dans $\overline{NE}(X/T) \cap N_1(X/Y)$.

Si l'inclusion est stricte, le théorème de Hahn-Banach permet de trouver un \mathbb{Q} -fibré en droites L sur X tel que $L > 0$ contienne $\overline{NE}(X/Y) \setminus \{0\}$ mais pas $\overline{NE}(X/T) \cap N_1(X/Y)$. Par le critère de Kleiman-Seshadri, L est Y -ample, et le corollaire 2.6 permet donc de trouver un \mathbb{Q} -fibré en droites M sur Y tel que $L + \pi^*M$ soit T -ample. Puisque π^*M est nul sur $N_1(X/Y)$, on obtient donc pour toute classe non-nulle $\alpha \in \overline{NE}(X/T) \cap N_1(X/Y)$

$$L \cdot \alpha = (L + \pi^*M) \cdot \alpha > 0,$$

contradiction. □

3. CONTRACTIONS

3.1. Factorisation de Stein.

Définition 3.1. Une *contraction* est un morphisme propre de schémas $\pi : X \rightarrow Y$ tel que le morphisme canonique $\mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme.

On notera qu'une contraction est automatiquement surjective. L'importance de cette notion réside dans le fait que tout morphisme propre est la composée d'une contraction et d'un morphisme fini :

Proposition 3.2. *[Factorisation de Stein] Tout morphisme propre de schémas $X \rightarrow Y$ se factorise en $X \rightarrow Y' \rightarrow Y$ avec $X \rightarrow Y'$ une contraction et $Y' \rightarrow Y$ un morphisme fini. Une telle factorisation est de plus unique à isomorphisme près, et s'appelle la factorisation de Stein de $X \rightarrow Y$.*

Démonstration. Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre de schémas, $\pi_*\mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O}_Y -module cohérent, donc une \mathcal{O}_Y -algèbre finie, et le résultat suit avec $Y' := \text{Proj}_Y(\pi_*\mathcal{O}_X)$. \square

Rappelons le résultat fondamental de connexité, qui est une conséquence du théorème sur les fonctions formelles de Grothendieck-Zariski, cf. [Stacks, Tag 03H0].

Théorème 3.3. *Toute contraction $\pi : X \rightarrow Y$ est à fibres géométriquement connexes.*

La réciproque est fautive en général. Cependant, on montrera ci-dessous :

Proposition 3.4. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme propre surjectif avec Y normal. Si les fibres génériques de π au dessus des points génériques de Y sont géométriquement connexes et géométriquement réduites (par exemple, si π est birationnel), alors π est une contraction.*

Corollaire 3.5. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif propre entre schémas intègres normaux de caractéristique nulle. Alors π est à fibres géométriquement connexes ssi $K(Y)$ est algébriquement clos dans $K(X)$.*

Exemple 3.6. Soit $Y \subset \mathbb{A}_k^2$ la cubique cuspidale d'équation $(y^2 - x^3 = 0)$, et $\nu : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow Y$ sa normalisation, donnée par $\nu(t) = (t^2, t^3)$. Toutes les fibres de ν consistent en un point réduit, sauf la fibre au dessus de 0, qui est un point double. En tout état de cause, toutes les fibres de ν sont géométriquement connexes, bien que $\mathcal{O}_Y \rightarrow \nu_*\mathcal{O}_X$ ne soit pas surjectif.

Exemple 3.7. Si k'/k est une extension de corps finie et purement inséparable, l'unique fibre de $\pi : X := \text{Spec } k' \rightarrow Y := \text{Spec } k$ est géométriquement connexe, réduite, mais pas géométriquement réduite, et $\pi_*\mathcal{O}_X = k'$ contient strictement $\mathcal{O}_Y = k$.

Exemple 3.8. Soit $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}(t)}^2$ l'adhérence de la conique affine d'équation $x^2 = ty^2$. Alors X est intègre, géométriquement connexe, mais pas géométriquement intègre, et $x/y \in K(X)$ est en effet de degré 2 sur $\mathbb{C}(t)$

Notons également :

Lemme 3.9. *Si $\pi : X \rightarrow Y$ est une contraction avec X réduit (resp. intègre, normal), alors Y est réduit (resp. intègre, normal).*

Démonstration. Les deux premiers cas sont clairs. Si X est normal et si f est une fonction rationnelle sur Y entière sur \mathcal{O}_Y , alors π^*f est une fonction rationnelle sur X entière sur \mathcal{O}_X . On a donc $\pi^*f \in \mathcal{O}_X$, d'où $f \in \pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. \square

Preuve de la proposition 3.4. On peut supposer que $Y = \text{Spec } A$ est affine et irréductible, et il s'agit de montrer que toute $f \in B := H^0(X, \mathcal{O}_X)$ s'écrit $f = \pi^*g$ avec $g \in A$. Posons $k := K(Y)$, et soient $\eta = \text{Spec } k$ le point générique de Y et $\bar{\eta} := \text{Spec } \bar{k}$ son point générique géométrique. La fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$ est propre, réduite et connexe sur un corps algébriquement clos, et satisfait donc

$$H^0(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}) = \bar{k}.$$

Puisque $k \rightarrow \bar{k}$ est fidèlement plat, ceci implique

$$H^0(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = k,$$

et il existe donc $g \in k = K(Y)$ telle que $f = \pi^*g$. La cohérence de $\pi_*\mathcal{O}_X$ montre en outre que B est finie sur A , de sorte que g est entière sur A , et donc $g \in A$ par normalité de Y . \square

3.2. Contractions birationnelles.

Lemme 3.10. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ une contraction birationnelle. Alors $E := \text{Exc}(\pi)$ satisfait :*

- (i) $E = \pi^{-1}(\pi(E))$;
- (ii) π induit un isomorphisme $X \setminus E \simeq Y \setminus \pi(E)$;
- (iii) $\pi(E)$ est de codimension au moins 2.

Démonstration. Puisque π est à fibres connexes, un point x est isolé dans sa fibre ssi celle-ci se réduit à x . Puisque π est fermée (étant propre), on a alors

$$\mathcal{O}_{Y, \pi(x)} \simeq (\pi_*\mathcal{O}_X)_{\pi(x)} = \mathcal{O}_{X, x},$$

ce qui montre (i). Pour (ii), il suffit d'observer que π est un isomorphisme local injectif sur $X \setminus \text{Exc}(\pi)$, à nouveau par connexité des fibres.

Enfin, soit $y \in Y$ un point de codimension 1. Le morphisme induit

$$\pi' : X' := X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, y}) \rightarrow Y' := \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, y})$$

est encore une contraction par platitude de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, y}) \rightarrow Y$; par ailleurs, on voit facilement que π' est encore birationnel, et donc fini puisque $\dim Y' = 1$. Par unicité de la factorisation de Stein, il en résulte que π' est un isomorphisme, ce qui donne $y \in Y \setminus \pi(E)$. \square

D'après la proposition 3.4, tout morphisme birationnel propre $\pi : X \rightarrow Y$ avec Y normal est une contraction.

3.3. Faces d'un cône. La référence pour cette partie est [Roc, Section18]. Soit C un cône convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie V . L'intérieur relatif $\text{ri}(C)$ est défini comme l'intérieur de C dans $\text{Vect } C$, et on pose $\dim C := \dim \text{Vect } C$. Un point $x \in C$ est dans $\text{ri}(C)$ ssi il existe un intervalle

Une face de C est un sous-cône convexe $F \subset C$ contenant tous les $x, y \in C$ tels que $x + y \in F$. Une face de dimension 1 est donc un rayon extrémal.

Lemme 3.11. *L'ensemble $\mathcal{F}(C)$ des faces de C , partiellement ordonné par l'inclusion, est un treillis complet, i.e. tout sous-ensemble de $\mathcal{F}(C)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.*

Démonstration. La borne inférieure d'une famille de face est simplement son intersection. La borne supérieure est la borne inférieure de l'ensemble des majorants, qui est non-vide puisqu'il contient C . \square

Si F est une face de C , tout sous-cône convexe B tel que $\text{ri}(B)$ coupe F est contenu dans F . Réciproquement, tout sous-cône de C relativement ouvert est contenu dans l'intérieur relatif d'une face, et on a donc une partition

$$(3.1) \quad C = \coprod_{F \in \mathcal{F}(C)} \text{ri}(F).$$

Deux points $x, y \in C$ appartiennent à un même $\text{ri}(F)$ ssi x, y appartiennent à un même intervalle relativement ouvert contenu dans C . En utilisant ceci, on voit que la borne supérieure d'une famille \mathcal{G} de faces est l'unique face contenant $\sum_{F \in \mathcal{G}} \text{ri}(F)$ dans son intérieur relatif.

Notons que C est la seule face de dimension $\dim C$. Toute face F satisfait

$$F = C \cap \text{Vect } F,$$

puisque F est un face de $C \cap \text{Vect } F$ de dimension maximale (mais tout rayon R contenu dans C , extrémal ou non, vérifie aussi $R = C \cap \text{Vect } R$). En particulier, si C est fermé, ses faces le sont aussi.

On utilisera la caractérisation suivante des faces :

Lemme 3.12. *Soit \mathcal{B} un ensemble de sous-cônes convexes $B \subset C$ telle que :*

- (i) $C = \coprod_{B \in \mathcal{B}} \text{ri}(B)$;
- (ii) pour tous $B, B' \in \mathcal{B}$, il existe $B'' \in \mathcal{B}$ tel que

$$B + B' \subset B'' \text{ et } \text{ri}(B) + \text{ri}(B') \subset \text{ri}(B'').$$

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{F}(C)$.

Démonstration. Soit F une face de C , et notons \mathcal{B}_F l'ensemble des $B \in \mathcal{B}$ tels que $\text{ri}(B) \cap F \neq \emptyset$, de sorte que $F \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_F} B$. Puisque F est une face, on a en fait $B \subset F$ pour tout $B \in \mathcal{B}_F$, et donc $F = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_F} B$.

Choisissons maintenant $B \in \mathcal{B}_F$ de dimension maximale. Pour tout $B' \in \mathcal{B}_F$, considérons B'' comme dans (ii). L'intérieur relatif de B'' doit aussi rencontrer F , i.e. $B'' \in \mathcal{B}_F$. Par maximalité de $\dim B$, on a donc $B \subset B''$ et $\dim B = \dim B''$, donc $\text{ri}(B) \subset \text{ri}(B'')$. Par (i) on en déduit que $B = B''$, et donc $B' \subset B$, ce qui montre que $F = B$.

On a donc montré $\mathcal{F}(C) \subset \mathcal{B}$. Réciproquement, pour tout $B \in \mathcal{B}$ il existe une face F de C telle que $\text{ri}(B) \subset \text{ri}(F)$, et donc $\text{ri}(B) = \text{ri}(F)$ par (i). Ceci implique $B = F$, d'où $\mathcal{B} = \mathcal{F}(C)$. \square

Une *face exposée* de C est l'intersection de C et d'un hyperplan d'appui, i.e. une face de la forme $F = C \cap y^\perp$ avec $y \in C^*$. Une face n'est pas toujours exposée :

Exemple 3.13. Soit C le cône de base la réunion d'un carré et de deux demi-cercles posés sur deux côtés opposés du carré. Alors les rayon extrémaux de C correspondant aux sommets du carré ne sont pas exposés.

Supposons maintenant C est fermé, de sorte que $C = C^{**}$. Pour tout sous-cône $B \subset C$ on pose

$$B^\vee := C^* \cap B^\perp.$$

Il s'agit d'une face exposée de C^* , avec $B^\vee = C^* \cap y^\perp$ pour tout $y \in \text{ri}(F)$, et $B^{\vee\vee}$ est donc la plus petite face exposée de C contenant B . En particulier, on a

$$\dim B^\vee \leq \text{codim } B^{\vee\vee} \leq \text{codim } B,$$

ce qui montre que tout sous-cône de codimension 1 est une face exposée.

Exemple 3.14. Si C est le cône de lumière d'une forme quadratique q de type Minkowski, les sous-cônes non-triviaux de C sont tous de dimension 1, et sont des faces exposées. Via l'isomorphisme $V \simeq V^*$ induit par q , on a $C = C^*$ et $R = R^\vee$ pour tout rayon extrémal R , et donc

$$\dim R^\vee < \text{codim } R$$

bien que R soit exposé.

Définition 3.15. C est localement (rationnellement) polyédral en x si ...

Lemme 3.16. Si C est localement polyédral en x , alors la face F de x vérifie $\dim F^\vee = \text{codim } F$. En particulier, elle est exposée.

3.4. Cône semiample et contractions. Dans ce qui suit, $X \rightarrow T$ désigne un morphisme projectif de schémas.

On note $\mathcal{C}(X/T)$ l'ensemble des contractions $\pi : X \rightarrow Y$ de T -schémas avec Y projectif sur T , modulo isomorphisme. On munit $\mathcal{C}(X/T)$ de l'ordre partiel ou $\pi \geq \pi'$ si π factorise π' . Si π, π' sont dans $\mathcal{C}(X/T)$, la factorisation de Stein du morphisme induit $X \rightarrow Y \times_T Y'$ fournit une borne $\sup(\pi, \pi')$ dans $\mathcal{C}(X/T)$.

Lemme 3.17. Un fibré en droites L sur X est T -globalement engendré ssi il existe une contraction $\pi : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(X/T)$ et un fibré en droites T -ample A sur Y tels que $L = \pi^* A$.

Définition 3.18. Le cône semiample $\text{SAmp}(X/T) \subset N^1(X/T)$ est défini comme le cône convexe engendré par les classes numériques de fibrés en droites T -globalement engendrés.

On a donc des inclusions

$$\text{Amp}(X/T) \subset \text{SAmp}(X/T) \subset \text{Nef}(X/T),$$

où $\text{Amp}(X/T)$ (resp. $\text{Nef}(X/T)$) coïncide avec l'intérieur (resp. l'adhérence) de $\text{SAmp}(X/T)$.

Le résultat suivant est dû à Hironaka [Hir60] et Kleiman [Kle66, §5, Theorem 1].

Théorème 3.19. L'application qui à toute contraction $\pi : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(X/T)$ associe

$$\pi^* \text{SAmp}(Y/T) \subset \text{SAmp}(X/T)$$

établit un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$\mathcal{C}(X/T) \simeq \mathcal{F}(\text{SAmp}(X/T)).$$

Corollaire 3.20. L'ensemble $\mathcal{C}(X/T)$ est un treillis complet, i.e. toute famille de contractions dans $\mathcal{C}(X/T)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Preuve du théorème 3.19. Pour tout $\pi : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(X/T)$ on pose $B_\pi := \pi^* \text{SAmp}(Y/T)$. Puisque $\text{Amp}(Y/T)$ engendre $N^1(Y/T)$, on a clairement $\text{Vect } B_\pi = \pi^* N^1(Y/T)$ et $\text{ri}(B_\pi) = \pi^* \text{Amp}(Y/T)$.

Etant donné $\pi : X \rightarrow Y$ et $\pi' : X \rightarrow Y'$ dans $\mathcal{C}(X/T)$, soit $X \rightarrow Y'' \rightarrow Y \times_T Y'$ la factorisation de Stein du morphisme $X \rightarrow Y \times_T Y'$ induit par π et π' , et notons $\pi'' : X \rightarrow Y''$, $\tau : Y'' \rightarrow Y$ et $\tau' : Y'' \rightarrow Y'$ les morphismes induits, qui sont tous des contractions.

Si on se donne des fibrés en droites T -amples H, H' sur Y, Y' respectivement, alors

$$H'' := \tau^* H + \tau'^* H'$$

est T -ample sur Y'' . En effet, si on note p et p' les projections de $Y \times_T Y'$ sur Y et Y' , alors H'' est le tiré en arrière de $p^* H + p'^* H'$ par le morphisme fini $Y'' \rightarrow Y \times_T Y'$.

Puisque les cônes amples sont engendrés par les classes numériques de fibrés en droites amples, on obtient

$$\text{ri}(B_\pi) + \text{ri}(B_{\pi'}) \subset \text{ri}(B_{\pi''}),$$

et on vérifie de même que $B_\pi + B_{\pi'} \subset B_{\pi''}$.

Si π' factorise π , on a clairement $B_\pi \subset B_{\pi'}$. Réciproquement, on va montrer que π' factorise π dès que $\text{ri}(B_\pi)$ intersecte $B_{\pi'}$. Ceci impliquera en particulier que les $\text{ri}(B_\pi)$ sont deux à deux disjoints.

Si $\text{ri}(B_\pi) \cap B_{\pi'}$ est non-vidé, on peut en particulier choisir H de sorte que $\pi''^* \tau^* H = \pi^* H$ soit Y' -numériquement trivial, et $\tau^* H$ est donc lui aussi Y' -numériquement trivial par injectivité de $\pi''^* : N^1(Y''/Y') \rightarrow N^1(X/Y')$. Pour tout choix de H' comme ci-dessus, on voit que H'' est à la fois Y' -ample et Y' -numériquement trivial; ceci implique que la contraction $Y'' \rightarrow Y'$ est un morphisme fini, et donc un isomorphisme par unicité de la factorisation de Stein. Mais ceci signifie précisément que π' factorise π .

Il résulte de ce qui précède que $\coprod_{\pi \in \mathcal{C}(X/T)} \text{ri}(B_\pi)$ est un sous-cône convexe de $\text{SAmp}(X/T)$. Mais il contient la classe de tout fibré en droites T -globalement engendré d'après le lemme 3.17, d'où

$$\text{SAmp}(X/T) = \coprod_{\pi \in \mathcal{C}(X/T)} \text{ri}(B_\pi).$$

Le lemme 3.11 implique donc que les $\text{ri}(B_\pi)$ donnent toutes les faces de $\text{SAmp}(X/T)$. On a de plus vu que $\pi \leq \pi'$ (i.e. π' factorise π) ssi $B_\pi \subset B_{\pi'}$, d'où le résultat. \square

Au vu du théorème 3.19, il est naturel d'introduire pour toute contraction $\pi : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(X/T)$ le sous-cône

$$N_\pi := \pi^* \text{Nef}(Y/T)$$

du cône nef $\text{Nef}(X/T)$.

Lemme 3.21. *Pour toute contraction $\pi : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}(X/T)$ on a :*

- (i) $\text{Vect } N_\pi = \pi^* N^1(Y/T)$ et $N_\pi = \text{Nef}(X/T) \cap \text{Vect } N_\pi$;
- (ii) $\text{ri}(N_\pi) = \pi^* \text{Amp}(Y/T)$;
- (iii) la face duale $N_\pi^\vee \subset \overline{\text{NE}}(X/T)$ s'identifie à $\overline{\text{NE}}(X/Y)$;

(iv) la face exposée $N_\pi^{\vee\vee}$ de $\text{Nef}(X/T)$ coïncide avec l'ensemble des classes de $\text{Nef}(X/T)$ qui sont Y -numériquement triviales.

De plus, π est uniquement déterminée par N_π .

Démonstration. (i) découle du lemme 2.19, par surjectivité d'une contraction, et (ii) est immédiat. Pour (iii), on observe que $N_1(X/Y) \subset N_1(X/T)$ s'identifie à l'orthogonal de $\pi^*N^1(Y/T)$, de sorte que

$$N_\pi = \overline{\text{NE}}(X/T) \cap N_1(X/Y),$$

et on conclut grâce à la proposition 2.26. Enfin (iv) résulte directement de (iii).

Puisque π est une contraction, elle est déterminée ensemblistement par la donnée des courbes C contenues dans ses fibres. Ce sont aussi celles telles que $[C]$ appartienne à $N_\pi^\vee = \overline{\text{NE}}(X/Y)$, ce qui montre que π est uniquement déterminée par N_π^\vee , donc *a fortiori* par N_π . \square

L'analogue nef du théorème 3.19 échoue de deux manières. D'une part, puisqu'un fibré nef n'est pas toujours semiample, l'inclusion

$$\bigcup_{\pi \in \mathcal{C}(X/T)} \text{ri}(N_\pi) \subset \text{Nef}(X/T)$$

est stricte en général. Pire encore, N_π n'est pas nécessairement une face de $\text{Nef}(X/T)$. Avant de donner un exemple, on rappelle le résultat suivant, conséquence bien connue de l'existence de décompositions de Zariski.

Proposition 3.22. *Si X est de dimension 2, alors $\text{Nef}(X/T)$ est localement rationnellement polyédral dans $\text{Big}(X/T)$.*

Démonstration. On suit la preuve de [BKS, Corollary 1.3]. Soit P un \mathbb{R} -diviseur T -nef et T -gros. On peut trouver un nombre fini de diviseurs T -gros D_i avec $P \in \sum_i \mathbb{R}_+ D_i$. Le lemme ?? ci-dessous implique qu'il n'existe qu'un nombre fini de courbes C T -verticales telles que $D_i \cdot C < 0$, et on peut donc trouver $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que

$$P \cdot C > 0 \implies (P + \varepsilon D_i) \cdot C > 0$$

pour toute courbe T -verticale C . On a alors

$$P \cdot C > 0 \implies D \cdot C > 0$$

pour tout $D \in U := \sum_i \mathbb{R}_+(P + D_i)$, qui est un voisinage conique de P , et il en résulte aisément que

$$U \cap \text{Nef}(X/T) = U \cap \bigcap_{P \cdot C = 0} \{C \geq 0\},$$

où C parcourt l'ensemble des courbes T -verticales telles que $P \cdot C = 0$, qui est fini grâce au lemme 3.23. \square

Lemme 3.23. *Si X est de dimension 2 et D est un \mathbb{R} -diviseur T -gros sur X , alors l'ensemble des courbes C T -verticales telles que $D \cdot C \leq 0$ est fini.*

Démonstration. Par le lemme de Kodaira, on peut écrire $D = A + E$ avec A T -ample et E effectif, et toute courbe T -verticale C telle que $D \cdot C \leq 0$ est contenue dans $\text{supp } E$. \square

Exemple 3.24. On va donner un exemple de surface projective lisse X et d'une contraction birationnelle $\pi : X \rightarrow Y$ vers une surface projective Y avec $\rho(X/Y) = 1$ et telle que $N_\pi = \pi^* \text{Nef}(Y)$ ne soit pas une face de $\text{Nef}(X)$.

On commence par observer que si N_π est une face de $\text{Nef}(X)$, elle est nécessairement exposée. En effet, π étant birationnelle, $\text{ri}(N_\pi) = \pi^* \text{Amp}(Y)$ est contenu dans le cône gros de X ; $\text{Nef}(X)$ est donc localement polyédral en tout point de $\text{ri}(N_\pi)$, et on conclut grâce au lemme 3.16.

On se place maintenant dans le contexte de l'exemple de Zariski-Mumford [Laz, I.2.3.A]. On se donne donc 12 points distincts p_1, \dots, p_{12} sur une cubique lisse $C \subset \mathbb{P}^2$, et on note $\mu : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement de ces points et F_i les diviseurs exceptionnels correspondants. La transformée stricte de C sur X est une courbe elliptique lisse E linéairement équivalente à $\mu^* \mathcal{O}(3) - \sum_i F_i$, donc d'auto-intersection -3 .

Puisque C est projectivement normale, il existe une quartique D de \mathbb{P}^2 avec $D \cap C = \sum_i p_i$ ssi

$$(3.2) \quad p_1 + \dots + p_{12} = \mathcal{O}_C(4)$$

dans $\text{Pic}(C)$; dans ce cas,

$$\mu^* \mathcal{O}(4) - \sum_i F_i = \mu^* \mathcal{O}(1) + E$$

est sans point base sur X , et la factorisation de Stein du morphisme associé fournit une contraction divisorielle $\pi : X \rightarrow Y$ avec $\text{Exc}(\pi) = E$.

Pour tout $i \neq j$, $F_i - F_j$ est Y -numériquement trivial. Si Y est \mathbb{Q} -factorielle, le lemme de négativité implique que $F_i - F_j$ est le tiré en arrière d'un \mathbb{Q} -diviseur sur Y (cf. corollaire 5.12), ce qui implique après restriction à $E \simeq C$ que $p_i - p_j$ est de torsion dans $\text{Pic}^0(C)$.

Si on choisit des $p_i \in C$ satisfaisant (3.2) qui soient suffisamment généraux, on en déduit que Y n'est pas \mathbb{Q} -factorielle. On peut alors trouver un diviseur de Weil sur Y qui n'est pas \mathbb{Q} -Cartier. En écrivant sa transformée stricte comme différence de diviseurs amples, on obtient l'existence d'un diviseur ample A sur X tel que $\pi_* A$ ne soit pas \mathbb{Q} -Cartier. Sa projection orthogonale

$$D := A + \frac{1}{3}(A \cdot E)E$$

est alors nef et satisfait $D \cdot E = 0$, i.e. $D \in F_\pi$. Puisque X est rationnelle, l'équivalence numérique coïncide avec l'équivalence \mathbb{Q} -linéaire, donc $D \in N_\pi$ impliquerait que $\pi_* D = \pi_* A$ est \mathbb{Q} -Cartier.

On notera que

$$K_X = \mu^* \mathcal{O}(-3) + \sum_i F_i$$

satisfait $K_X \cdot E = 3$, i.e. K_X est Y -ample.

Exemple 3.25. L'exemple 3.14 peut être réalisé géométriquement comme suit : on pose $X = E \times E$ où E est une courbe elliptique générale, de sorte que $N^1(X)$ est engendré par les classes de la diagonale Δ et des fibres F_1 et F_2 des deux projections [Laz, I.1.5.B]. Le cône $\text{Nef}(X)$ coïncide avec le cône de lumière de la

forme d'intersection q sur $N^1(X)$, et le sous-cône N_π associé à l'une ou l'autre des projections $\pi : X \rightarrow E$ est un rayon extrémal de $\text{Nef}(X)$.

4. NORMALISATION

4.1. Normalisation d'un schéma. Dans cette partie, on ne considère que des schémas réduits.

Si l'on autorise temporairement des schémas qui ne soient pas noethériens, tout schéma intègre X admet une normalisation, caractérisée à isomorphisme près comme l'unique morphisme $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ qui soit birationnel et entier. Si X est seulement réduit, on définit sa normalisation comme l'union disjointe des normalisations de ses composantes irréductibles.

Lorsque ν est fini, $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est cohérent, donc définit un idéal fractionnaire (qui coïncide avec la clôture intégrale de \mathcal{O}_X dans \mathcal{K}_X). On définit alors le *conducteur* $C \subset X$ comme le schéma des pôles de $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$. L'ensemble des points normaux de X coïncide avec $X \setminus C$, et est donc ouvert dans ce cas.

Dans le cas général, deux niveaux de pathologie peuvent survenir :

- (i) \tilde{X} n'est pas nécessairement noethérien ;
- (ii) même si \tilde{X} est noethérien, le morphisme ν n'est pas nécessairement fini.

Ainsi, le théorème de Krull-Akizuki [Eis, Theorem 11,13] garantit que \tilde{X} reste noethérien si $\dim X = 1$, mais le lieu de normalité de X peut ne pas être ouvert.

Exemple 4.1. Hochster introduit dans [Hoc73] la construction générale suivante. Etant donnée une famille $x_i \in X_i$ de variétés affines avec un point marqué, il montre que le localisé X du produit $\prod_i X_i$ par le système multiplicatif des fonctions s'annulant sur $\bigcup_i \pi_i^{-1}(x_i)$ est un schéma noethérien affine et intègre, avec de plus :

- (i) les points fermés de X forment un ensemble (y_i) en bijection avec les x_i , et tout ensemble infini de points fermés est dense ;
- (ii) $\mathcal{O}_{X,y_i} \simeq \mathcal{O}_{X_i \otimes_{K_i} x_i}$, avec K_i le corps des fonctions de $\prod_{j \neq i} X_j$.

En prenant pour $x_i \in X_i$ une singularité de courbe, on obtient un schéma intègre affine X de dimension 1 qui est singulier en chacun de ses points fermés.

Cependant, la normalisation de tout schéma *excellent* est finie [Stacks, Tag 07QV]. Sans donner ici la définition d'un schéma excellent, rappelons que cette notion est stable par localisation et morphisme de type fini, et que tout anneau noethérien local complet (en particulier, tout corps) et tout anneau de Dedekind de caractéristique nulle est excellent.

Lemme 4.2. *Si X est un schéma dont la normalisation $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ est finie, alors le morphisme de cycle $\text{Div}(X) \rightarrow Z^1(X)$ se factorise en*

$$\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(\tilde{X}) \hookrightarrow Z^1(\tilde{X}) \rightarrow Z^1(X).$$

Remarque 4.3. Le morphisme $\nu^* : \text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(\tilde{X})$ est surjectif si le conducteur est de dimension 0 (par exemple sur une courbe), mais pas en général. Quant à $\nu_* : Z^1(\tilde{X}) \rightarrow Z^1(X)$, son conoyau est de torsion, mais n'est pas surjectif en général (normalisation d'un cusp).

La normalisation permet dans certains cas de calculer le groupe de Picard d'une variété, grâce à la suite exacte suivante.

Lemme 4.4. [Eis, Exercices 11.15, 11.16] *Soit X un schéma intègre dont la normalisation $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ est finie, C le conducteur, et $\tilde{C} := \nu^{-1}(C)$. On a alors une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X)^* \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{X})^* \oplus \mathcal{O}(C)^* \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{C})^* \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{X}) \oplus \text{Pic}(C).$$

Exemple 4.5. [Eis, Exercice 11.16] Soit $X \subset \mathbb{A}_k^2$ la cubique cuspidale d'équation $(y^2 - x^3 = 0)$. Sa normalisation \tilde{X} est isomorphe à \mathbb{A}_k^1 , donc $\mathcal{O}(\tilde{X})^* = k^*$ et $\text{Pic}(\tilde{X}) = 0$. Le conducteur C est le point fermé $0 \in X$, et $\tilde{C} \simeq \text{Spec } k[t]/(t^2)$. On obtient donc

$$\text{Pic}(X) \simeq (k, +)$$

4.2. Normalisation d'un cône sur un schéma. Si $S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S_m$ est un anneau intègre (positivement) gradué, sa clôture intégrale (dans son corps des fractions) reste graduée. Ce résultat n'est pas complètement immédiat ; la démonstration proposée dans [Eis, Exercice 4.21] consiste à d'abord établir le fait, plus simple, que la clôture intégrale d'un anneau gradué dans un autre reste graduée (cf. [Stacks, Tag 077G]). On conclut alors grâce au fait élémentaire suivant :

Lemme 4.6. *Si on note $H \subset S$ le système multiplicatif des éléments homogènes non-nuls, et $(H^{-1}S)_{\geq 0}$ la partie de degré positif de l'anneau \mathbb{Z} -gradué $H^{-1}S$, alors la clôture intégrale de S dans $(H^{-1}S)_{\geq 0}$ est égale à celle dans $K(S)$.*

Démonstration. La partie de degré 0 de $H^{-1}S$ s'identifie au corps

$$K_0(S) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in S_m \text{ pour un même } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

En choisissant $t \in H$ de degré minimal non-nul, on obtient

$$(H^{-1}S)_{\geq 0} = K_0(S)[t].$$

On a donc $K(S) = K_0(S)(t)$, et il est aisé de voir que t est transcendant sur $K_0(S)$. Il en résulte que $(H^{-1}S)_{\geq 0}$ est intégralement clos dans $K(S)$, d'où le résultat. \square

Sous des hypothèses de finitude raisonnables, on va donner ici une description géométrique de la clôture intégrale de S . Rappelons d'abord qu'un anneau gradué $S = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S_m$ est noethérien ssi S_0 est noethérien et S est de type fini comme S_0 -algèbre.

Théorème 4.7. *Soit S un anneau gradué intègre noethérien, engendré en degré 1 (comme S_0 -algèbre). Posons $X = \text{Proj } S$, muni de son fibré en droites $\mathcal{O}_X(1)$. Si la normalisation $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ est finie, alors*

$$R\left(\tilde{X}, \nu^* \mathcal{O}_X(1)\right) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0\left(\tilde{X}, \nu^* \mathcal{O}_X(m)\right)$$

est fini sur S , et s'identifie à la clôture intégrale de S dans son corps de fractions.

En particulier, si S est intégralement close, alors X est normal et on a

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = S_m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Rappelons que la normalisation ν est finie dès que S_0 est excellent, par exemple de type fini sur un corps.

Lemme 4.8. *Si X est un schéma normal et L est un fibré en droites, alors l'anneau des sections*

$$R(X, L) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mL)$$

est intégralement clos (qu'il soit noethérien ou non).

Démonstration. D'après le lemme 4.6, il suffit de montrer que $R(X, L)$ est intégralement clos dans la partie de degré positif de $H^{-1}R(X, L)$, qui se plonge naturellement dans $R(\xi, L|_\xi)$ avec $\xi \in X$ le point générique. Mais un élément de $R(\xi, L|_\xi)$ qui est entier sur $R(X, L)$ ne peut avoir de pôles, donc s'étend à $R(X, L)$ par normalité de X . \square

Remarque 4.9. De manière générale, $R(X, L)$ coïncide avec l'anneau des fonctions de l'espace total du fibré dual L^* .

Preuve du théorème 4.7. Posons $R := R(X, \mathcal{O}_X(1))$ et $\tilde{R} := R(\tilde{X}, \nu^*\mathcal{O}_X(1))$, de sorte que $S \subset R \subset \tilde{R}$, avec \tilde{R} intégralement clos par le lemme 4.6.

Si on note ξ le point générique de X , on a par définition (cf. [Har, p.116]).

$$H^{-1}S = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(1)_\xi,$$

où H désigne comme ci-dessus le système multiplicatif des éléments homogènes non-nuls de S .

Puisque ν est birationnel, il en résulte immédiatement que S , R , et \tilde{R} ont même corps de fractions. Par ailleurs, la formule de projection donne

$$H^0(\tilde{X}, \nu^*\mathcal{O}_X(m)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}),$$

et la cohérence de $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ montre donc que \tilde{R} est fini sur R .

Il reste donc à montrer que R est fini sur S . Ceci résulte directement du fait que S et R coïncident en grand degré. Rappelons en la raison : on écrit S comme quotient de $S_0[T_0, \dots, T_n]$ par un idéal homogène I , ce qui définit un plongement fermé de X dans $\mathbb{P}_{S_0}^n$. L'image de S dans R coïncide avec celle du morphisme de restriction

$$R(\mathbb{P}_{S_0}^n, \mathcal{O}(1)) \rightarrow R(X, \mathcal{O}_X(1)).$$

Si on désigne par \mathcal{J}_X l'idéal de X dans $\mathbb{P}_{S_0}^n$, on a

$$H^1(\mathbb{P}_{S_0}^n, \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{J}_X) = 0$$

pour tout $m \gg 1$ par annulation de Serre, ce qui donne la surjectivité souhaitée de

$$H^0(\mathbb{P}_{S_0}^n, \mathcal{O}(m)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)).$$

\square

Exemple 4.10. L'anneau de coordonnées homogènes $R(X)$ d'une variété projective plongée $X \subset \mathbb{P}_k^n$ est défini comme le quotient de $k[T_0, \dots, T_n]$ par l'idéal gradué I définissant X , et $\hat{X} := \text{Spec } R(X)$ est alors le cône affine sur X .

On dit que X est *projectivement normale* (pour le plongement donné dans \mathbb{P}_k^n) si \hat{X} est normale. D'après le théorème 4.7, X est projectivement normale ssi X est normale et le morphisme de restriction $H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(m)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ est surjectif pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Vu que $H^q(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(m)) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ si $0 < q < n$, ceci montre que toute hypersurface normale de \mathbb{P}^n est projectivement normale (pour $n \geq 2$). Par contre, le plongement quartique de \mathbb{P}_k^1 dans \mathbb{P}_k^3 de paramétrisation affine $t \mapsto (t, t^3, t^4)$ n'est pas projectivement normal, puisque $h^0(\mathbb{P}_k^3, \mathcal{O}(1)) = 4$ alors que

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = h^0(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}(4)) = 5.$$

Le résultat suivant est une traduction des propositions 4 et 6 de [Sam61].

Théorème 4.11. Soit S un anneau gradué noethérien intègrement clos engendré en degré 1, et posons $\hat{X} := \text{Spec } S$ et $X = \text{Proj } S$, muni de son fibré $\mathcal{O}_X(1)$.

- (i) Le morphisme naturel de groupes de classe $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(\hat{X})$ est surjectif, de noyau engendré par $\mathcal{O}_X(1)$.
- (i) Si S_0 est un corps, alors $\text{Pic}(\hat{X}) = 0$.

Exemple 4.12. Soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ lisse et projectivement normale. Le cône affine \hat{X} est factoriel ssi $\mathcal{O}_X(1)$ engendre $\text{Pic}(X)$, et \hat{X} est \mathbb{Q} -factoriel ssi $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = 1$. Pour $k = \mathbb{C}$, la théorie de Hodge montre que cette dernière condition revient à dire que $\rho(X) = 1$ et $b_1(X) = 0$.

4.3. Clotûre intégrale d'un idéal.

Définition 4.13. Soit A un anneau intègre et intègrement clos, et I un idéal fractionnaire. La *clotûre intégrale* \bar{I} de I est définie comme l'ensemble des $f \in K(A)$ satisfaisant une équation du type

$$f^n + \sum_{i=1}^n a_i f^{n-i} = 0$$

avec $a_j \in I^j$.

On montre que \bar{I} est lui aussi un idéal fractionnaire.

Remarque 4.14. On définit habituellement la clotûre intégrale d'un idéal $I \subset A$ en ne considérant que les f dans A . Cependant, les deux notions sont compatibles puisqu'on a supposé A intègrement clos dans $K(A)$.

Exemple 4.15. Tout idéal réduit est intègrement clos.

Lemme 4.16. Si I est un idéal fractionnaire d'un anneau normal A , alors $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \bar{I}^m$ coïncide avec la clotûre intégrale de $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} I^m$.

Démonstration. On vérifie facilement à partir de la définition que la clôture intégrale de l'algèbre de Rees

$$S := A[tI] \simeq \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} I^m$$

dans $K(A)[t]$ coïncide avec $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \overline{I^m}$. Puisque $S_m = I^m$ est contenu dans $K(A)$, on a $K(A) = K_0(S)$ avec les notations du lemme 4.6, et ce dernier permet de conclure. \square

En combinant le lemme 4.16 au théorème 4.7, on obtient la description géométrique suivante de la clôture intégrale d'un idéal fractionnaire (voir aussi [Laz, Proposition 9.6.6]).

Théorème 4.17. *Soit \mathfrak{a} un idéal fractionnaire sur un schéma normal excellent X , et $\pi : X' \rightarrow X$ la normalisation de l'éclatement de \mathfrak{a} (qui est finie sur l'éclatement, par excellence). Si on note F le diviseur de X' tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$, alors*

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-F) = \overline{\mathfrak{a}}.$$

Plus généralement, on a

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-mF) = \overline{\mathfrak{a}^m}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

En particulier, si $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ est un idéal sur un schéma normal et si \mathfrak{a}^m est intégralement clos pour tout m , alors l'éclatement de X le long de \mathfrak{a} est normal. Ceci est faux si on suppose seulement \mathfrak{a} intégralement clos, ou même réduit.

Exemple 4.18. La surface $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ d'équation $x^2 + y^4 + z^4 = 0$ a une unique singularité en 0, et est donc normale d'après l'exemple 1.32. Dans une carte affine adéquate, l'éclatement X' de X en 0 s'obtient en posant $x = uw$, $y = vw$ et $z = w$. Il s'ensuit que X' a pour équation $u^2 + w^2(v^4 + 1) = 0$, donc est singulier le long de la droite $u = w = 0$, et par conséquent ne peut être normal.

Remarque 4.19. Si X est une surface algébrique normale, le produit de deux idéaux intégralement clos reste intégralement clos ssi X est à singularités rationnelles [Lip69, Cut90]. Pour de telles singularités, il est donc vrai que l'éclatement d'un idéal intégralement clos est normal.

On peut maintenant énoncer la caractérisation valuative de la clôture intégrale.

Proposition 4.20. *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{K}_X$ un idéal fractionnaire sur un schéma normal excellent X . Alors*

$$\overline{\mathfrak{a}} = \bigcap_v \{f \in \mathcal{K}_X \mid v(f) \geq v(\mathfrak{a})\},$$

où v parcourt toutes les valuations divisorielles (resp. réelles) sur X .

Démonstration. Soit f est une fonction rationnelle sur X telle que

$$f^n + \sum_{i=1}^n a_i f^{n-i} = 0$$

avec $a_i \in \mathfrak{a}^i$. Pour toute valuation réelle v sur X , on obtient

$$nv(f) \geq \min_i (v(a_i) + (n-i)v(f)),$$

d'où $v(f) \geq v(\mathfrak{a})$.

Réciproquement, supposons que $f \in \mathcal{K}_X$ vérifie $v(f) \geq v(\mathfrak{a})$ pour toute valuation divisorielle v . Soit $\pi : X' \rightarrow X$ la normalisation de l'éclatement de X le long de \mathfrak{a} , et F le diviseur sur X' tel que $\mathcal{O}_{X'}(-F) = \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'}$. Si on note $F = \sum_i a_i F_i$ la décomposition irréductible, on a $\text{ord}_{F_i}(\mathfrak{a}) \geq a_i$ pour tout i , et $\text{ord}_D(\mathfrak{a}) \geq 0$ pour tout autre diviseur irréductible $D \subset X'$. Il en résulte que f satisfait les mêmes conditions, et donc $f \in \pi_* \mathcal{O}_{X'}(-F) = \bar{\mathfrak{a}}$ par le théorème 4.17. \square

5. POSITIVITÉ

5.1. Diviseurs \mathbb{Q} -Cartier.

Définition 5.1. Si D est un diviseur de Weil sur un schéma normal X , on introduit la \mathcal{O}_X -algèbre graduée

$$\mathcal{R}_X(D) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(mD).$$

Lemme 5.2. *Soit D est un diviseur de Weil sur un schéma normal X . Sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{R}_X(D)$ est de type fini comme \mathcal{O}_X -algèbre.
- (ii) Il existe un schéma normal X' et un morphisme birationnel propre $\pi : X' \rightarrow X$ qui soit un isomorphisme en codimension 1 et tel que la transformée stricte D' de D soit \mathbb{Q} -Cartier et π -ample.

De plus, D est \mathbb{Q} -Cartier ssi π est un isomorphisme.

Démonstration. La \mathcal{O}_X -algèbre graduée

$$\mathcal{R}_X(D) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(mD)$$

est intégralement close. (...) [Kaw, Lemma 3.1], [KM, Lemma 6.2]. \square

Remarque 5.3. Si $\dim X = 2$, le lemme précédent dit que $\mathcal{R}_X(D)$ est de type fini ssi D est \mathbb{Q} -Cartier.

Comme le théorème 4.17 montre que $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}_X(D)^m}$ est toujours une \mathcal{O}_X -algèbre de type fini, il s'ensuit que si D est un diviseur de Weil qui n'est pas \mathbb{Q} -Cartier sur une surface normale, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que l'inclusion $\overline{\mathcal{O}_X(D)^m} \subset \mathcal{O}_X(mD)$ soit stricte.

Proposition 5.4. *Soit D un diviseur de Weil \mathbb{Q} -Cartier sur X , et soit $m \in \mathbb{N}$ minimal tel que mD soit Cartier en $x \in X$ donné. Alors il existe un voisinage U de x et un revêtement Galoisien fini $p : \tilde{U} \rightarrow U$ de groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, étale en codimension 1, avec \tilde{U} normale et p^*D Cartier.*

Démonstration. Soit U un voisinage de x sur lequel il existe une fonction rationnelle f telle que $mD = \text{div}(f)$. On vérifie que

$$\tilde{U} := \text{Spec}_U(\mathcal{R}_U(D)/f\mathcal{R}_U(D))$$

convient. (...). □

5.2. Le «lemme de négativité».

Théorème 5.5. *Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre schémas normaux, et soit D un \mathbb{Q} -diviseur π -nef sur Y . Alors $D \leq 0$ ssi $\pi_*D \leq 0$.*

D'après le lemme de Chow, il suffit de considérer le cas où π est projectif. La preuve du théorème 5.5 est particulièrement simple dans le cas où D est un \mathbb{Q} -diviseur π -ample. On peut en effet trouver $m \gg 1$ tel que mD soit Cartier et π -globalement engendré, ce qui signifie que

$$\mathcal{O}_Y(mD) = \mathcal{O}_Y \cdot \pi_*\mathcal{O}_Y(mD)$$

en tant qu'idéaux fractionnaires. Or on a

$$\pi_*\mathcal{O}_Y(mD) \subset \mathcal{O}_X(m\pi_*D)$$

d'après le lemme 1.63, d'où

$$\mathcal{O}_Y(mD) = \mathcal{O}_Y \cdot \pi_*\mathcal{O}_Y(mD) \subset \mathcal{O}_Y \cdot \mathcal{O}_X(m\pi_*D).$$

En utilisant maintenant $\pi_*D \leq 0$, on obtient donc $\mathcal{O}_Y(mD) \subset \mathcal{O}_Y$, et donc $D \leq 0$.

On va ramener le cas général au cas π -ample via un argument de perturbation, en suivant [BdFF, Proposition 2.12]. Tout d'abord, pour $W \in Z^1(X)_{\mathbb{R}}$ un \mathbb{R} -diviseur de Weil, on pose $\mathcal{O}_X(W) := \mathcal{O}_X(\lfloor W \rfloor)$, ce qui revient à

$$\mathcal{O}_X(W) = \{f \in \mathcal{K}_X \mid W + \text{div}(f) \geq 0\}.$$

Lemme 5.6. *Pour toute valuation réelle v sur X , la suite $m \mapsto v(\mathcal{O}_X(mW))$ est sous-additive, et il existe $C > 0$ tel que $v(\mathcal{O}_X(mW)) \geq -Cm$.*

Démonstration. La sous-additivité résulte directement de l'inclusion évidente

$$\mathcal{O}_X(mW) \cdot \mathcal{O}_X(m'W) \subset \mathcal{O}_X((m+m')W)$$

pour tout $m, m' \in \mathbb{N}$. Au voisinage du centre $c_X(v)$, on peut trouver une fonction rationnelle non-nulle $f \in \mathcal{O}_X(-W)$. On a alors $W \leq D := \text{div}(f)$, donc $\mathcal{O}_X(mW) \subset \mathcal{O}_X(mD)$, d'où

$$v(\mathcal{O}_X(mW)) \geq mv(D) = v(\mathcal{O}_X(mD)).$$

□

On peut donc introduire :

Définition 5.7. Si W est un \mathbb{R} -diviseur de Weil sur X et si v est une valuation réelle sur X , on définit $v(W) \in \mathbb{R}$ par

$$-v(W) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} v(\mathcal{O}_X(mW)) = \inf_{m \geq 1} \frac{1}{m} v(\mathcal{O}_X(mW)).$$

On prendra garde que $W \mapsto v(W)$ est seulement sous-additive sur $Z^1(X)_{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

Lemme 5.8. *Pour tout valuation réelle v sur X , $W \mapsto v(W)$ est sous-additive et homogène, donc convexe. En particulier, elle est continue sur tout sous-espace de dimension finie de $Z^1(X)_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. \mathbb{Q} -homogène et clair, et $W \mapsto v(W)$ est croissante. □

Le lemme de négativité va résulter de l'énoncé plus précis suivant.

Théorème 5.9. *Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre variétés normales, et soit D un \mathbb{Q} -diviseur π -nef sur Y . Alors on a $v(D) \leq v(\pi_*D)$ pour toute valuation réelle v .*

Démonstration. Par le lemme de Chow, on peut supposer que π est projectif et se donner un diviseur π -ample A . Pour tout rationnel $\varepsilon > 0$, $D_\varepsilon := D + \varepsilon A$ est \mathbb{Q} -Cartier et π -ample, et l'argument ci-dessus montre que pour tout m grand et divisible (dépendant de ε) on a

$$\mathcal{O}_Y(mD_\varepsilon) \subset \mathcal{O}_Y \cdot \mathcal{O}_X(m\pi_*D_\varepsilon).$$

Puisque mD_ε est Cartier, ceci implique que

$$v(D_\varepsilon) \leq -\frac{1}{m}v(\mathcal{O}_X(m\pi_*D_\varepsilon)),$$

et donc $v(D_\varepsilon) \leq v(\pi_*D_\varepsilon)$ en faisant $m \rightarrow \infty$. On conclut en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$, sachant que $v(\pi_*D_\varepsilon) \rightarrow v(\pi_*D)$ grâce au lemme 5.8. □

Le lemme de négativité implique immédiatement :

Corollaire 5.10. *Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre schémas normaux, M un \mathbb{Q} -diviseur sur X et E un \mathbb{Q} -diviseur effectif π -exceptionnel sur Y . Alors tout \mathbb{Q} -diviseur effectif D π -numériquement équivalent à E satisfait $D \geq E$.*

Remarque 5.11. En particulier, si L un fibré en droites sur X , alors

$$R(Y, \pi^*L + F) \simeq R(X, L)$$

pour tout diviseur F effectif et π -exceptionnel. Mais dans ce cas le résultat découle directement de la formule de projection et du lemme 1.63, qui donne $\pi_*\mathcal{O}_Y(mF) = \mathcal{O}_X$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Corollaire 5.12. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel propre entre schémas normaux, avec Y \mathbb{Q} -factoriel. Un \mathbb{Q} -diviseur D sur X est Y -numériquement trivial ssi il existe un \mathbb{Q} -diviseur E sur Y tel que $D = \pi^*E$.*

Lemme 5.13. *A DEPLACER Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel projectif entre schémas normaux, et supposons que :*

- (i) X est \mathbb{Q} -factoriel;
- (ii) $\rho(X/Y) = 1$.

Si $\text{Exc}(\pi)$ est de codimension 1, alors il est nécessairement irréductible.

Démonstration. Soit E une composante irréductible de $\text{Exc}(\pi)$ avec $\text{codim } E = 1$. Puisque X est \mathbb{Q} -factoriel, E est \mathbb{Q} -Cartier, π -exceptionnel et effectif; il ne peut donc être Y -nef par le lemme de négativité. Il existe donc une courbe C contractée par π et telle que $E \cdot C < 0$. Mais (ii) implique que toutes les courbes contractées par π sont Y -numériquement proportionnelles; pour toute courbe C contractée par π , on a donc $E \cdot C < 0$, d'où $C \subset E$. Mais $\text{Exc}(\pi)$ est couvert par de telles courbes, et on obtient donc $\text{Exc}(\pi) = E$. \square

5.3. Fibration d'Iitaka. On se donne un schéma intègre X propre sur un corps k , muni d'un fibré en droites L .

Définition 5.14. Soit $\phi : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante entre k -schémas intègres. On dit que ϕ est *presque holomorphe* si son lieu d'indétermination ne domine pas Y .

Plus précisément, si on note Z le graphe de f muni des projections $\mu : Z \rightarrow X$ et $p : Z \rightarrow Y$, la condition signifie que μ est un isomorphisme au voisinage de la fibre générique de p . On définit alors la *fibre générique* de ϕ comme étant celle de p .

Définition 5.15. Si $0 \neq V \subset H^0(X, L)$ est un k -espace vectoriel, on définit l'*application de Kodaira* $\Phi_V : X \dashrightarrow \mathbb{P}V^*$ en associant à tout x en dehors du lieu base de V l'hyperplan de V défini par

$$\Phi(x) := \{s \in V \mid s(x) = 0\}.$$

Lorsque X est propre sur k et $V = H^0(X, L)$, on notera pour simplifier

$$\Phi_L := \Phi_{H^0(X, L)}.$$

Lemme 5.16. L'image $Y := \Phi_V(X) \subset \mathbb{P}V^*$ de Φ_V a pour algèbre de coordonnées homogène la sous-algèbre de $R(X, L)$ engendrée par V .

L'application rationnelle dominante $\Phi_V : X \dashrightarrow Y$ est presque holomorphe,

Démonstration. Le premier point est trivial. Pour le second, soit $\mu : X' \rightarrow X$ l'éclatement de l'idéal de base de V et E le diviseur effectif correspondant, de sorte que V s'identifie à un sous-espace sans point base $V' \subset H^0(Z, \mu^*L - E)$, avec

$$Y = \Phi_V(X) \simeq \Phi_{V'}(Z).$$

Si $s \in V$ est une section non nulle de diviseur D , alors $\Phi_{V'}(\text{supp } E) \subset \Phi_V(\text{supp } D)$, lequel est contenu dans la section hyperplane de $Y \subset \mathbb{P}V^*$ définie par $s \in V$, par définition de Φ_V . En d'autres termes, la fibre générique de $Z \rightarrow Y$ ne rencontre pas E , et le résultat suit. \square

On va montrer les résultats suivants, essentiellement dus à Iitaka pour les variétés complexes. On suivra ici pour l'essentiel [Mori, Section 1] et [BCL, Proposition 2.1].

Théorème 5.17. Soit $S \subset R(X, L)$ une sous-algèbre graduée non-triviale, au sens où il existe $m \geq 1$ tel que $S_m \neq 0$.

(i) Les applications de Kodaira $\Phi_{S_m} : X \dashrightarrow Y_m$ sont birationnellement équivalentes entre elles pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand, avec

$$K(Y_m) \simeq K_0(S) := \left\{ \frac{s}{t} \mid s, t \in S_m \text{ pour un même } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

(ii) On note $\kappa(S) \in \{0, \dots, \dim X\}$ la dimension commune des images Y_m . Si X est géométriquement intègre sur k , alors il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1}m^{\kappa(S)} \leq \dim_k S_m \leq Cm^{\kappa(S)}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$.

Notons que $\kappa(S) = 0$ équivaut à $\dim_k S_m \leq 1$ pour tout m .

(mentionner Okounkov/Kaveh-Khovanskii pour asymptotique précise).

Théorème 5.18. *On suppose X normal et propre sur k . Pour $m \in \mathbb{N}(L)$ assez grand, $\Phi_{mL} : X \dashrightarrow Y_m$ est, à équivalence birationnelle près, l'unique application presque holomorphe dominante $\phi : X \dashrightarrow Y$ telle que*

- (i) $K(Y)$ est algébriquement clos dans $K(X)$;
- (ii) $\dim Y = \kappa(X, L)$;
- (iii) $\kappa(F, L|_F) = 0$ sur la fibre générique F de ϕ .

Preuve du théorème 5.17. Comme l'extension de corps $K(X)/k$ est de type fini, $K_0(S)/k$ l'est aussi (voir par exemple [Jou, Proposition ??]), et il en résulte immédiatement que $K(Y_m) = K_0(S)$ pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ suffisamment grand, d'où (i).

Pour (ii), on suit l'approche de [BCL, Prop 2.1]. Pour la borne inférieure, on choisit des éléments homogènes $s_0, \dots, s_\kappa \in S$ algébriquement indépendants, de sorte que S contient l'algèbre de polynômes pondérés $k[s_0, \dots, s_\kappa]$. Il en résulte aisément une estimée $\dim_k S_m \geq C^{-1}m^\kappa$ pour tout m suffisamment divisible. La minoration pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ en découle, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}(S)$, la multiplication par un élément non-nul de S_k fournit une injection de S_m dans S_{m+k} .

Pour la borne supérieure, observons que l'énoncé est invariant par extension du corps de base. On peut donc supposer que k est algébriquement clos et non dénombrable. Par le lemme de Chow, on peut de plus supposer que X est projectif sur k . Le théorème de Bertini permet alors de trouver un fermé $T \subset X$ de dimension $\kappa(S)$, intersection complète de sections hyperplanes très générales, tel que $\Phi_{S_m}(T) = Y_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand.

La restriction $S_m \rightarrow H^0(T, mL)$ est alors injective pour tout m , puisque toute $s \in S_m$ dans le noyau a un diviseur D qui domine Y_m , alors que $\Phi_m(\text{supp } D)$ est contenu par construction dans une section hyperplane de Y_m . On conclut par Hilbert-Serre. \square

Preuve du théorème 5.18. On fixe $m_0 \in \mathbb{N}(L)$ tel que $K(Y_{m_0}) \simeq K_0(X, L)$, et on note F la fibre générique de $\Phi_{m_0 L}$. D'après le lemme 1.34, F est géométriquement intègre ssi $K_0(X, L)$ est algébriquement clos dans $K(X)$ (puisque $K(X)$ est parfait, étant de caractéristique nulle).

Si $f \in K(X)$ est algébrique sur $K_0(X, L)$, on trouve $s \in H^0(X, mL)$ telle que sf entière sur $R(X, L)$. Or $R(X, L)$ est intégralement close d'après le lemme 4.8, donc $sf \in R(X, L)$, et $f \in K_0(X, L)$.

Montrons maintenant que $\kappa(F, L|_F) = 0$, ce qui équivaut à $K_0(F, L|_F)$ algébrique sur $K_0(X, L)$, et donc à $K_0(F, L|_F) = K_0(X, L)$ puisque ce dernier est algébriquement clos dans $K(X)$. Si on note $\mu : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de l'idéal de base de m_0L et E le diviseur effectif correspondant, alors $\mu^*(m_0L) = p^*H + E$ avec H ample sur Y_{m_0} et $p : X' \rightarrow Y_{m_0}$ le morphisme induit.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe $r \gg 1$ tel que $f_*\mathcal{O}_{X'}(m\mu^*L) \otimes \mathcal{O}_{Y_{m_0}}(rH)$ soit globalement engendré, ce qui donne une surjection

$$H^0(X', m\mu^*L + rf^*H) \rightarrow H^0(F, mL|_F).$$

Mais $H^0(X', m\mu^*L + rf^*H)$ s'injecte dans

$$H^0(X', \mu^*((m + rm_0)L) \simeq H^0(X, (m + rm_0)L),$$

via la multiplication par la section canonique de $H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(E))$, et on a donc bien $K_0(F, L|_F) = K_0(X, L)$.

Réciproquement, soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante satisfaisant (i), (ii) et (iii). L'injectivité du morphisme de restriction $R(X, L) \rightarrow R(F, L|_F)$ donne des inclusions

$$K_0(X, L) \subset K_0(F, L|_F) \subset K(X).$$

L'hypothèse (ii) signifie que $K_0(F, L|_F)$ est de degré de transcendance nul sur $K(Y)$, donc égal à $K(Y)$ puisque ce dernier est algébriquement clos dans $K(X)$ par (i). On obtient donc $K_0(X, L) \subset K(Y)$. Mais ces deux corps ont même degré de transcendance sur k par (iii), donc $K(Y)$ est algébrique sur $K_0(X, L)$. Puisque $K_0(X, L)$ est algébriquement clos dans $K(X)$, on conclut $K(Y) = K_0(X, L)$, ce qui signifie que f est birationnellement équivalente à $\Phi_{mL} : X \dashrightarrow Y_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}(L)$ assez grand. \square

5.4. Diviseurs gros.

Définition 5.19. Soit X un schéma normal et propre sur un corps k . Un diviseur L sur X est dit *gros* si $\kappa(X, L) = \dim X$.

De façon équivalente, L est gros ssi l'application de Kodaira $\phi_{mL} : X \dashrightarrow Y_m$ est birationnelle pour tout $m \in \mathbb{N}(L)$ assez grand. En effet, dire que $K_0(X, L)$ est de degré de transcendance sur k maximal revient à dire que $K(X)$ est algébrique sur $K_0(X, L)$, et donc $K(X) = K_0(X, L)$ puisque $K_0(X, L)$ est algébriquement clos dans $K(X)$.

Lemme 5.20. [Lemme de Kodaira] Soit L un diviseur sur un schéma X normal et projectif sur k . Alors L est gros ssi pour tout diviseur ample H sur X il existe $m \geq 1$ tel que $H^0(X, mL - H) \neq 0$.

Démonstration. On peut supposer que H est effectif. On a alors $h^0(H, mL|_H) = O(m^{\dim X - 1})$, donc l'application de restriction $H^0(X, mL) \rightarrow H^0(H, mL|_H)$ ne peut être injective pour tout $m \in \mathbb{N}(L)$ grand, et son noyau $H^0(X, mL - H)$ est donc non nul. La réciproque est claire. \square

Corollaire 5.21. *Si L est gros alors $H^0(X, mL) \neq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ assez grand.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{N}(L) \subset \mathbb{N}$ est un sous-semigroupe, il suffit de trouver $m \geq 1$ tel que $H^0(X, mL)$ et $H^0(X, (m+1)L)$ soient non nuls. Soit H un diviseur suffisamment ample pour que $H^0(X, H)$ et $H^0(X, L + H)$ soient non nuls. Si on choisit $m \geq 1$ tel que $H^0(X, mL - H) \neq 0$, alors $H^0(X, mL) \neq 0$ puisque $H^0(X, H) \neq 0$, et de même $H^0(X, (m+1)L) \neq 0$ puisque $H^0(X, L + H) \neq 0$. \square

Proposition 5.22. *Si L est nef, alors L est gros ssi $(L^n) > 0$ avec $n = \dim X$.*

Démonstration. Par le lemme de Chow on peut supposer que X est projectif. On a alors $h^q(X, mL) = O(m^{n-1})$ pour tout $q \geq 1$ (cf. [Laz, Exemple I.1.2.31]), et donc

$$h^0(X, mL) = \frac{m^n}{n!}(L^n) + O(m^{n-1})$$

par la version asymptotique du théorème de Riemann-Roch. \square

Dans le cas relatif, on introduit :

Définition 5.23. Soit X un schéma normal, propre et dominant sur une base intègre T , et L un diviseur sur X . On dit que L est T -gros si L est gros sur la fibre générique de $X \rightarrow T$.

Il est important de remarquer que tous les diviseurs sont T -gros lorsque $X \rightarrow T$ est génériquement fini.

Lemme 5.24. [Lemme de Kodaira] Soit X projectif sur T et L un diviseur T -gros sur X . Alors localement sur T (resp. globalement si T admet un fibré en droites ample), il existe un \mathbb{Q} -diviseur effectif E tel que $L - E$ soit T -ample. Si L est de plus nef, alors $L - \varepsilon E$ est ample pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Soit $\pi : X \rightarrow T$ le morphisme structural et H un diviseur T -ample sur X . Le lemme 5.24 montre que $\pi_*\mathcal{O}_X(mL - H) \neq 0$ pour $m \gg 1$, d'où l'assertion localement sur T .

Si on suppose T quasi-projectif, alors il existe un diviseur A sur T tel que

$$H^0(T, \pi_*\mathcal{O}_X(mL - H) \otimes \mathcal{O}_T(A)) \neq 0.$$

Par la formule de projection, on a donc $H^0(X, mL - H + \pi^*A) \neq 0$, d'où le résultat puisque $H - \pi^*A$ est aussi T -ample. \square

Théorème 5.25. Soit L un diviseur T -gros sur X tel que la \mathcal{O}_T -algèbre $\mathcal{R}(X/T, L)$ soit de type fini. Alors $Y := \text{Proj}_T \mathcal{R}(X/T, L)$ est normal et $\Phi : X \dashrightarrow Y$ est surjective en codimension 1.

Lemme 5.26. Soit Y un T -schéma projectif muni d'un fibré en droites relativement ample A , $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel propre et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Pour tout $m \gg 1$, le morphisme d'évaluation

$$\mathcal{H}^0(X/T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m\pi^*A)) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m\pi^*A)$$

est alors surjectif sur $X \setminus \text{Exc}(\pi)$.

Démonstration. Pour tout $m \gg 1$, le faisceau $\mathcal{O}_Y(mA) \otimes \pi_*\mathcal{F}$ est engendré par

$$H^0(Y/T, \mathcal{O}_Y(mA) \otimes \pi_*\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}^0(X/T, \mathcal{O}_X(m\pi^*A) \otimes \mathcal{F}).$$

□

Preuve du théorème 5.32. Soit Z la normalisation du graphe de Φ avec ses projections $\mu : Z \rightarrow X$ et $\pi : Z \rightarrow Y$. Il s'agit de montrer que tout diviseur de Weil irréductible $E \subset Z$ qui n'est pas π -exceptionnel n'est pas non plus μ -exceptionnel.

Quitte à remplacer L par un multiple, on peut supposer que $\mathcal{R}(X/T, L)$ est engendrée en degré 1, de sorte qu'il existe un diviseur ample A sur Y tel que $\mu^*L = \pi^*A + F$ avec F effectif et π -exceptionnel. Comme Z est aussi projectif sur T , on peut choisir un diviseur ample B sur Z , et le lemme 5.26 montre qu'il existe $m \gg 1$ et $s \in H^0(Z/T, m\pi^*A - B)$ ne s'annulant pas au point générique de E .

Si on note G le diviseur de s , on obtient,

$$m\mu^*L = B + G + mF$$

et donc $(G + mF) \cdot C < 0$ pour toute courbe irréductible propre C dans une fibre de μ . Puisque μ est à fibres géométriquement connexes, il en résulte que $G + mF$ contient $\text{Exc}(\mu)$ dans son support. Mais E n'est pas dans le support de $G + mF$, et n'est donc pas μ -exceptionnel. □

5.5. Modèles. Soit T un schéma intègre, et $\phi : X \dashrightarrow X'$ une application birationnelle entre T -schéma normaux propres. Si D est \mathbb{Q} -Cartier sur X , on définit le \mathbb{Q} -diviseur de Weil $D' := \phi_*D$ en passant par le graphe. Ceci coïncide avec la transformée stricte de D lorsque ϕ est surjective en codimension 1, mais pas en général.

Si D' est \mathbb{Q} -Cartier, on dit que D' est un *modèle* de D , en sous-entendant la donnée de ϕ .

Définition 5.27. Si D' et D'' sont deux modèles de D , on écrit $D' \leq D''$ si $v(D') \leq v(D'')$ pour toute valuation divisorielle v .

Lemme 5.28. Si D' est un modèle de D tel que $D' \leq D'$, alors $\mathcal{R}(X/T, D) \simeq \mathcal{R}(X'/T, D')$.

Proposition 5.29. Si $D' \leq D$ est un modèle T -nef de D , alors $D' \leq D''$ pour tout autre modèle D'' de D .

Démonstration. Si v est une valuation divisorielle donnée, on peut choisir Y projective normale avec des morphismes birationnels $\pi : Y \rightarrow X$, $\pi' : Y \rightarrow X'$ et $\pi'' : Y \rightarrow X''$ levant les indéterminations des applications birationnelles en présence, et telle que $v = \text{ord}_E$ avec $E \subset Y$ un diviseur. Puisque D' et D'' sont des modèles de D , on a

$$\pi^*D = \pi'^*D' + F'$$

et

$$\pi^*D = \pi''^*D'' + F''$$

avec F' π' -exceptionnel et F'' π'' -exceptionnel, et $D \geq D'$ donne de plus $F' \geq 0$.

Comme π'^*D' est T -nef, $F'' - F' = \pi'^*D' - \pi''^*D''$ est π'' -nef. On a de plus $\pi''_*(F'' - F') = -\pi''_*F' \leq 0$ puisque F'' est π'' -exceptionnel, d'où $F'' - F' \leq 0$ par le lemme de négativité. En particulier, il vient $\text{ord}_E(F'') \leq \text{ord}_E(F')$, i.e. $v(D'') \geq v(D')$. \square

Théorème 5.30. *Soit D un diviseur \mathbb{Q} -Cartier sur X . Sont équivalentes :*

- (i) D admet un modèle ample $D' \leq D$.
- (ii) D est gros et $R(X, D)$ est de type fini.

Dans ce cas, X' et D' sont uniques, avec $X' \simeq \text{Proj } R(X, D)$, et $X \dashrightarrow X'$ est surjective en codimension 1.

Remarque 5.31. Pour une sous-algèbre $S \subset R(X, D)$ intégralement close, de type fini et avec $\kappa(S) = \dim X$, l'application birationnelle $X \dashrightarrow \text{Proj } S$ n'est pas surjective en codimension un en général. Par exemple, si $(X, D) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ et $S \subset R(X, D)$ est donnée par l'annulation en un point p , alors $\text{Proj } S$ est l'éclatement de X en p .

Pour plus tard :

Théorème 5.32. *Si $\phi : X \dashrightarrow X'$ est un morphisme birationnel entre deux variétés projectives avec X à singularités terminales et X' à singularités canoniques et $K_{X'}$ nef, alors ϕ est surjective en codimension 1.*

Démonstration. Soit Y une résolution commune de X et X' , de sorte que K_X et $K_{X'}$ sont des modèles de K_Y avec $K_Y \geq K_X$, $K_Y \geq K_{X'}$ et $K_{X'}$ nef. La proposition 5.29 donne donc $v(K_X) \geq v(K_{X'})$ pour toute valuation divisorielle v , ce qui s'écrit $a_X(v) \leq a_{X'}(v)$ en terme de discrédances.

Si v est un diviseur sur X' , on a $a_{X'}(v) = 0$, donc $a_X(v) = 0$, ce qui montre que v ne peut être exceptionnel sur X , celle-ci étant à singularités terminales. \square

5.6. Cas des surfaces.

Définition 5.33. Soit X une surface lisse et $m \geq 1$. Une $(-m)$ -courbe sur X est une courbe rationnelle lisse $\mathbb{P}_k^1 \simeq E \subset X$ d'autointersection $(E^2) = -m$.

Lemme 5.34. *Soit X une surface lisse, $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme projectif et $E \subset X$ une courbe irréductible contenue dans une fibre de f .*

- (i) *Si K_X est T -pseudoeffectif, alors $(K_X \cdot E) < 0$ ssi E est une (-1) -courbe.*
- (ii) *Si K_X est T -nef et gros, alors $(K_X \cdot E) = 0$ ssi E est une (-2) -courbe.*

Démonstration. Si $\nu : \tilde{E} \rightarrow E$ est la normalisation de E , un calcul explicite en coordonnées (cf. [GH, p.505]) montre que

$$\deg \omega_E \geq \deg \omega_{\tilde{E}} + \sum_{p \in E} \text{mult}_p(E)(\text{mult}_p(E) - 1).$$

(i) Puisque K_X est f -pseudoeffectif, E ne peut pas être nef, et donc $(E^2) < 0$. Par conséquence on a $\deg \omega_E = (K_X \cdot E) + (E^2) \leq -2$. Mais $\deg \omega_E \geq \deg \omega_{\tilde{E}} = 2g(\tilde{E}) - 2$, d'où le résultat.

(ii) Si K_X est f -nef et gros, $K_X \cdot E = 0$ implique $(E^2) < 0$ par le théorème de l'indice de Hodge, d'où

$$-1 \geq 2g(\tilde{E}) - 2 + \sum_{p \in E} \text{mult}_p(E)(\text{mult}_p(E) - 1) \geq -2$$

Comme $\text{mult}_p(E)(\text{mult}_p(E) - 1)$ est pair, on a nécessairement $g(\tilde{E}) = 0$ et $\text{mult}_p(E) = 0$ pour tout p , d'où le résultat. \square

Théorème 5.35. *Soit X une surface lisse, et $E \subset X$ une $(-m)$ -courbe.*

- (i) *Si E est contenue dans une fibre d'un morphisme projectif $f : X \rightarrow S$, alors il existe un S -morphisme birationnel $\pi : X \rightarrow Y$ avec Y surface normale projective sur S et $\text{Exc}(\pi) = E$.*
- (ii) *Tout morphisme birationnel propre $\pi : X \rightarrow Y$ avec Y surface normale et $\text{Exc}(\pi) = E$ est isomorphe à l'éclatement de Y en $p = \pi(E)$, et le cône tangent à Y en p est isomorphe au cône affine sur la courbe rationnelle normale de degré m . En particulier, Y est lisse si $p = 1$.*

Démonstration. (i) Soit H un diviseur f -ample sur X , et considérons le \mathbb{Q} -diviseur

$$L := H + \frac{(H \cdot E)}{m} E,$$

la «projection orthogonale» de H . On a $L \cdot E = 0$ par construction, et on voit facilement que L est f -nef. Comme H est ample, il vient de plus que L est gros, de lieu non-ample contenu dans E , et donc égal à E puisque $L \cdot E = 0$.

Pour chaque $r \geq 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E(-rE) \rightarrow \mathcal{O}_{(r+1)E} \rightarrow \mathcal{O}_{rE} \rightarrow 0$$

Comme $\mathcal{O}_E(-rE) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(rm)$, on en déduit que $H^1(\mathcal{O}_{rE}) = 0$ pour tout $r \geq 1$.

Puisque $L \cdot E = 0$, il en résulte que $L|_{rE}$ est trivial pour tout r . Comme on a de plus $R^1 f_*(kH) = 0$ pour tout $k \gg 1$ grand et divisible, on conclut que kL est sans point base pour k grand et divisible.

On obtient donc le morphisme birationnel souhaité, avec $Y = \text{Proj}_S \mathcal{R}(X/S, mL)$.

(ii) On commence par montrer que le morphisme de restriction

$$(5.1) \quad \mathcal{R}(X/Y, -E) \rightarrow R(E, -E) \simeq R(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}(m))$$

est surjectif. Pour ce faire, il suffit de vérifier que

$$(5.2) \quad R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(-kE) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

Or on a pour chaque $r \in \mathbb{N}$ une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_E(-(k+r)E) \rightarrow \mathcal{O}_{(r+1)E}(-kE) \rightarrow \mathcal{O}_{rE}(-kE) \rightarrow 0,$$

ce qui montre par récurrence sur r que $H^1(\mathcal{O}_{rE}(-kE)) = 0$, et on conclut par le théorème des fonctions formelles.

Puisque $\mathcal{R}(X/Y, -E)$ est de type fini sur \mathcal{O}_Y et $R(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}(m))$ est engendrée en degré 1, un argument élémentaire montre que $\mathcal{R}(X/Y, -E)$ est engendrée en degré 1.

Si $f \in \mathfrak{m}_p$ a pour diviseur D , la formule de projection donne $\pi^* D \cdot E = 0$. Puisque toutes les composantes de D passent par 0, leur transformées strictes

ont un nombre d'intersection strictement positif avec E , et on voit donc que π^*f s'annule nécessairement le long de E . On obtient ainsi $\mathfrak{m}_p \subset \pi_*\mathcal{O}_X(-E)$, d'où $\pi_*\mathcal{O}_X(-E) = \mathfrak{m}_p$ par maximalité de \mathfrak{m}_p .

A ce stade, on a montré que

$$\mathcal{R}(X/Y, -E) \simeq \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_p^m,$$

ce qui montre que X est isomorphe à l'éclatement de Y en p . La surjectivité de (5.1) montre de plus que

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_p^m / \mathfrak{m}_p^{m+1} \simeq R(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)),$$

d'où l'assertion sur le cône normal. \square

Remarque 5.36. On peut en fait montrer que la contraction $\pi : X \rightarrow Y$ d'une $(-m)$ -courbe sur un point $p \in Y$ est formellement isomorphe en p à la contraction de l'espace total de $\mathcal{O}(-m)$ sur le cône $C(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$.

En effet, ceci est vrai pour $m = 1$, vu que Y est lisse, donc formellement isomorphe à \mathbb{A}^2 . Soit $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement cyclique d'ordre ramifié le long de E . Ici \tilde{X} est lisse puisque E l'est, et on a la formule de Riemann-Hurwitz

$$K_{\tilde{X}} = \nu^*(K_X + (1 - \frac{1}{m})E).$$

On en déduit que $\nu^*E = m\tilde{E}$ avec \tilde{E} une (-1) -courbe sur \tilde{X} . La contraction de \tilde{E} est $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -équivariante, et on conclut par le fait que $C(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ est le quotient de \mathbb{A}^2 par l'action diagonale de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Mieux : d'après [Gra62, Satz 7], un diviseur lisse $D \subset X$ avec fibré conormal ample admet un voisinage tubulaire formel (i.e. le complété formel de X le long de D est isomorphe à celui de l'espace total de N_D le long de sa section nulle) dès que

$$H^1(D, \mathcal{O}_D(-mD)) = H^1(D, T_D \otimes \mathcal{O}_D(-mD)) = 0$$

pour tout $m \geq 1$. Ceci est par exemple automatique si D est un espace projectif ou une variété abélienne (au moins en caractéristique nulle, par Kodaira). Si X est une surface, la condition d'annulation est satisfaite dès que

$$-(D^2) > 4g(D) - 4 = 2((K_X \cdot D) + (D^2)),$$

i.e. $-(D^2) > \frac{2}{3}(K_X \cdot D)$.

Théorème 5.37. *Si X est une surface normale, sa résolution minimale $\pi : Y \rightarrow X$ est l'unique morphisme birationnel projectif avec Y lisse et K_Y π -nef.*

Corollaire 5.38. *Si X est une surface à singularités terminales, alors X est lisse.*

Démonstration. Soit $\pi : Y \rightarrow X$ la résolution minimale. Puisque K_Y est π -nef, le théorème 5.32 montre que $\pi^{-1} : X \dashrightarrow Y$ est surjective en codimension 1, ce qui implique que π est un isomorphisme. \square

Proposition 5.39. *Soit X une surface normale, et $\pi : Y \rightarrow X$ sa résolution minimale. Sont équivalentes :*

- (i) X est à singularités canoniques ;
- (ii) K_Y est trivial dans $N^1(Y/X)$;
- (iii) les composantes de $\text{Exc}(\pi)$ sont toutes des (-2) -courbes.

6. SINGULARITÉS DES PAIRES

6.1. Classe canonique. Classe canonique (lien avec dualisant, [KM, Prop 5.75]). \mathbb{Q} -Gorenstein. Formule d'adjonction.

Exemple 6.1. Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété projectivement normale, et \hat{X} le cône affine sur X . Le théorème 4.11 implique que \hat{X} est \mathbb{Q} -Gorenstein ssi K_X est un multiple rationnel de $\mathcal{O}_X(1)$.

6.2. Log-discrédances.

Définition 6.2. Une *paire* (X, Δ) est la donnée d'une variété normale X et d'un \mathbb{Q} -diviseur de Weil Δ tel que $K_X + \Delta$ soit \mathbb{Q} -Cartier. Pour tout morphisme birationnel propre $\pi : Y \rightarrow X$ avec Y normale, on pose

$$K_{Y/(X,\Delta)} := K_Y - \pi^*(K_X + \Delta),$$

où K_Y et K_X sont des diviseurs canoniques choisis de sorte que $\pi_*K_Y = K_X$.

La condition $\pi_*K_Y = K_X$ signifie concrètement qu'il existe une forme rationnelle de degré maximal Ω sur X de diviseur K_X telle que K_Y soit le diviseur du tiré en arrière $\pi^*\Omega$ en tant que forme différentielle. Ceci garantit que le \mathbb{Q} -diviseur de Weil $K_{Y/(X,\Delta)}$ ne dépend pas du choix de K_X et K_Y ainsi choisis.

Définition 6.3. Soit (X, Δ) une paire. La *log-discrédance* de (X, Δ) en une valuation divisorielle v donnée est définie en posant

$$A_{(X,\Delta)}(v) = 1 + v(K_{Y/(X,\Delta)}) \in \mathbb{Q}$$

où $Y \rightarrow X$ est un morphisme birationnel propre avec Y normale et tel que $\text{codim}_{c_Y}(v) = 1$ (i.e. $v = \text{ord}_E$ avec $E \subset Y$ le diviseur irréductible de point générique $c_Y(v)$).

On notera que pour faire sens de $A_{(X,\Delta)}(v)$, il suffit en fait que $K_X + \Delta$ soit \mathbb{Q} -Cartier au voisinage de $c_X(v)$. Remarquons aussi que

$$K_X + \Delta \text{ Cartier} \implies A_{(X,\Delta)}(v) \in \mathbb{Z}$$

pour tout v .

Lorsque $\Delta = 0$ (et donc K_X est \mathbb{Q} -Cartier), on pose simplement $A_X := A_{(X,0)}$. Si K_X est Cartier, on peut en choisir un générateur local Ω au voisinage de $c_X(v)$, et on a alors $A_X(v) = 1 + v(\pi^*\Omega)$.

Exemple 6.4. Si $x \in X$ est un point régulier, alors $A_X(\text{ord}_x) = \text{codim } x$.

En effet, si on note $\pi : Y \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de l'adhérence de x et E la composante irréductible du diviseur exceptionnel qui domine x , alors $\text{ord}_x = \text{ord}_E$. En coordonnées locales, π est donnée par

$$(w_1, \dots, w_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = (w_1, w_1w_2, \dots, w_1w_r, w_{r+1}, \dots, w_n)$$

avec $r = \text{codim } x$ et z_1 une équation locale du diviseur exceptionnel. On a donc

$$\pi^*(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) = w_1^{r-1}(dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n),$$

d'où

$$\text{ord}_x(K_{Y/X}) = \text{ord}_E(\pi^*(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)) = r - 1.$$

Lemme 6.5. *Soit (X, Δ) une paire et X' une variété normale. Si $\phi : X \dashrightarrow X'$ est un morphisme birationnel surjectif en codimension 1, alors*

$$\phi_*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$$

avec Δ' la transformée stricte de Δ . Si $K_{X'} + \Delta'$ est de plus \mathbb{Q} -Cartier, alors

$$A_{(X, \Delta)}(v) - A_{(X', \Delta')}(v) = v(K_{X'} + \Delta') - v(K_X + \Delta)$$

pour toute valuation divisorielle v .

On rappelle que ϕ_* est défini via la graphe.

Remarque 6.6. Réciproquement, on peut reformuler la définition 6.7 comme suit : une paire (X, Δ) est lc (resp. klt) ssi pour tout morphisme birationnel propre $\mu : X' \rightarrow X$ avec X' normal, l'unique \mathbb{Q} -diviseur de Weil Δ' sur X' tel que

$$\mu^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$$

est à coefficients ≤ 1 (resp. < 1).

Définition 6.7. Une paire (X, Δ) est lc (pour «log-canonique») si $A_{(X, \Delta)}(v) \geq 0$ pour toute valuation divisorielle v , et (X, Δ) est klt (pour «log-terminale au sens de Kawamata») si $A_{(X, \Delta)}(v) > 0$.

Exemple 6.8. Si (X, Δ) est lc (resp. klt), alors Δ est à coefficients ≤ 1 (resp. < 1), et $\text{ord}_x(\Delta) \leq \text{codim } x$ (resp. $\text{ord}_x(\Delta) < \text{codim } x$) pour tout point régulier $x \in X$.

Proposition 6.9. *Si (X, Δ) n'est pas lc, alors $\inf_v A_{(X, \Delta)}(v) = -\infty$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe v avec $A_{(X, \Delta)}(v) < 0$. On va construire par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ un diviseur premier E_m sur une variété normale Y_m et un point régulier y_m de codimension 1 sur E_m . Pour $m = 0$ on choisit un morphisme birationnel propre $Y_0 \rightarrow X$ avec Y_0 normale et un diviseur premier $E_0 \subset Y_0$ tel que $v = \text{ord}_{E_0}$, ainsi qu'un point régulier $y_0 \in E_0$ de codimension 1 sur y_0 .

Une fois construits $y_{m-1} \in E_{m-1} \subset Y_{m-1}$, on note $Y_m \rightarrow Y_{m-1}$ l'éclatement normalisé de l'adhérence de y_{m-1} , $E_m \subset Y_m$ la composante irréductible du diviseur exceptionnel qui domine y_{m-1} , et y_m le point générique de $E_m \cap E'_0$ dominant y_{m-1} , avec E'_0 la transformée stricte de E_0 sur Y_m .

En y_m on a par définition des log-discrépances

$$K_{Y_m} + E = \pi_m^*(K_X + \Delta) + A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_{E_m})E_m + A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_{E'_0})E'_0$$

avec $E := E_m + E'_0$. Combiné avec le lemme 6.5, ceci montre que

$$A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_{y_m}) = A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_{y_m}) - A_{(Y_m, E)}(\text{ord}_{y_m}) = \text{ord}_{y_m}(K_{Y_m} + E) - \text{ord}_{y_m}(K_X + \Delta)$$

$$= A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{E_m}) \text{ord}_{y_m}(E_m) + A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{E'_0}) \text{ord}_{y_m}(E'_0).$$

Puisque $\text{ord}_{E'_0} = \text{ord}_{E_0} = v$ et $\text{ord}_{E_m} = \text{ord}_{y_{m-1}}$, on obtient donc

$$A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{y_m}) = A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{y_{m-1}}) + A_{(X,\Delta)}(v),$$

i.e.

$$A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{y_m}) = A_{(X,\Delta)}(\text{ord}_{y_0}) + mA_{(X,\Delta)}(v),$$

qui tend vers $-\infty$ lorsque $m \rightarrow \infty$ puisque $A_{(X,\Delta)}(v) < 0$. \square

6.3. Log-résolutions. On suppose dorénavant que le corps de base k est de caractéristique nulle.

Définition 6.10. On dit qu'une paire (X, D) est *log-lisse* si X est lisse et D est réduit à croisements normaux simples.

On introduit la terminologie suivante :

Définition 6.11. Soit (X, Δ) une paire et \mathfrak{a} un idéal fractionnaire de X . Une *log-résolution* de (X, Δ) et \mathfrak{a} est la donnée d'une paire log-lisse (X', D) et d'un morphisme birationnel propre $\mu : X' \rightarrow X$ tels que :

- (i) μ domine l'éclatement de \mathfrak{a} , de sorte qu'il existe un diviseur F sur X' tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$;
- (ii) D contient $\text{Exc}(\mu)$, le support de F et la transformée stricte de chaque composante de Δ .
- (iii) μ est l'éclatement d'un sous-schéma fermé de codimension au moins 2;

On note alors $D = \sum_{i \in I} D_i$ la décomposition irréductible, et $v_i = \text{ord}_{D_i}$ les valuations divisorielles correspondantes.

Le théorème de Hironaka garantit l'existence de log-résolutions dominant n'importe quel morphisme birationnel propre vers X . La condition (iii), qui n'est pas requise habituellement, garantit que $\text{Exc}(\mu)$ est le support d'un diviseur X -ample.

Proposition 6.12. Soit $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution d'une paire (X, Δ) , avec $D = \sum_i D_i$. Alors (X, Δ) est lc (resp. klt) ssi $A_{(X,\Delta)}(v_i) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout i .

En particulier, si $(X, \text{supp } \Delta)$ est log-lisse, alors (X, Δ) est lc (resp. klt) ssi Δ est à coefficients ≤ 1 (resp. < 1). On commence par traiter le cas particulier suivant :

Lemme 6.13. Toute paire log-lisse est lc.

Démonstration. Soit (X, D) une paire log-lisse. Quitte à restreindre X , on peut supposer qu'il existe un système régulier de paramètres (z_1, \dots, z_n) sur X tel que $D \leq \text{div}(z_1 \dots z_n)$. Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme birationnel propre tel que $v = \text{ord}_E$ pour un diviseur premier E sur Y normale.

Si w est une équation locale de E au voisinage d'un point fermé y de E , alors il existe $u_i \in \mathcal{O}_{Y,y}$ et des entiers $b_i \geq 1$ tels que $\pi^* z_i = u_i w^{b_i}$. Notons que $\sum_i b_i \geq v(D)$. On a

$$\pi^* dz_i = w^{b_i} du_i + b_i u_i w^{b_i-1} dw,$$

d'où

$$v(K_{Y/X}) = \text{ord}_E(\pi^*(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)) \geq -1 + \sum_i b_i \geq -1 + v(D).$$

□

La clé de la proposition 6.12 est la comparaison suivante entre log-discrépances :

Lemme 6.14. *Si $\pi : (X', D) \rightarrow X$ est une log-résolution de (X, Δ) , alors on a pour toute valuation divisorielle v*

$$A_{(X, \Delta)}(v) = A_{(X', D)}(v) + \sum_i A_{(X, \Delta)}(v_i)v(D_i),$$

Démonstration. On a par définition

$$K_{X'} + D = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_i A_{(X, \Delta)}(v_i)D_i.$$

Par ailleurs, le lemme 6.5 donne

$$A_{(X, \Delta)}(v) - A_{(X', E)}(v) = v(K_{X'} + E) - v(K_X + \Delta),$$

et le résultat suit. □

Preuve de la proposition 6.12. Soit v une valuation divisorielle. Si $c_{X'}(v) \in D$ alors $\sum_i A_{(X, \Delta)}(v_i)v(D_i) > 0$, et le lemme 6.14 donne $A_{(X, \Delta)}(v) > 0$ puisque $A_{(X', D)}(v) \geq 0$ par le lemme 6.13.

Si $c_{X'}(v)$ n'est pas dans D , alors π est un isomorphisme au voisinage de $c_Y(v)$, et donc $A_X(X, \Delta)(v) = A_{X'}(v) > 0$. □

Comme conséquence importante de la proposition 6.12, on obtient l'ouverture de la condition klt :

Corollaire 6.15. *Si (X, Δ) est une paire klt et M est un \mathbb{Q} -diviseur sur X , alors $(X, \Delta + \varepsilon M)$ est klt pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$.*

Corollaire 6.16. *Soit (X, Δ) une paire klt, $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme projectif surjectif, et H est un \mathbb{Q} -diviseur T -nef et T -gros sur X . Alors on peut trouver un \mathbb{Q} -diviseur effectif Δ' tel que $H - \Delta'$ soit T -ample et $(X, \Delta + \Delta')$ soit klt. On peut de plus s'arranger pour que $\lfloor \Delta + \Delta' \rfloor = \lfloor \Delta \rfloor$.*

En termes plus imagés, «klt+(nef et big)=klt+(ample)».

Démonstration. Le lemme de Kodaira montre qu'il existe un \mathbb{Q} -diviseur effectif E tel que $H - E$ soit ample. Puisque H est nef, $H - \varepsilon E = \varepsilon(H - E) + (1 - \varepsilon)H$ est ample pour tout $0 < \varepsilon < 1$. Le corollaire 6.15 permet de choisir $\varepsilon \ll 1$ tel que $(X, \Delta + \varepsilon E)$ soit klt, et on conclut en posant $\Delta' := \varepsilon E$. □

Proposition 6.17. *Soit (X, Δ) une paire lc (res. klt) et $|V|$ un système linéaire de dimension finie sans point base. Alors $(X, \Delta + cH)$ est encore lc (resp. klt) pour tout $H \in |V|$ général et $c \leq 1$ (resp. $c < 1$).*

Démonstration. Soit $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) . Puisque $|V|$ est sans point base, l'élément général $H \in |V|$ ne passe pas par $c_X(v_i)$. En particulier, π est un isomorphisme au dessus des points génériques de H , de sorte que π^*H coïncide avec la transformée stricte H' de H sur X' .

Le théorème de Bertini en caractéristique nulle [Har, II.8.18] montre de plus que H est lisse et que $D + H'$ est à croisements normaux simples. En d'autres termes, $\pi : (X', D + H') \rightarrow X$ est une log-résolution de $(X, \Delta + cH)$. D'après la proposition 6.12, il suffit donc de vérifier que

$$A_{(X, \Delta + cH)}(v) = A_{(X, \Delta)}(v) - cv(H)$$

est ≥ 0 (resp. > 0) pour $v = v_i$ et $v = \text{ord}_H$, ce qui résulte de $v_i(H) = 0$ et $A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_H) = 1$. \square

6.4. Log-discrédances et revêtements finis.

Lemme 6.18. *Soit $\phi : Y \rightarrow X$ un morphisme propre surjectif et génériquement fini. Pour toute valuation divisorielle v sur Y , il existe une unique valuation divisorielle $\phi(v)$ sur X et un entier $e(v) \in \mathbb{N}$ tel que $v(\phi^*f) = e(v)\phi(v)(f)$ pour tout $f \in K(X)$. De plus, $v \mapsto \phi(v)$ définit une surjection des valuations divisorielles de Y sur celles de X .*

Démonstration. (degré de transcendance de v) On peut trouver des morphismes birationnels propres $Y' \rightarrow Y$ et $X' \rightarrow X$ tels que :

- (i) ϕ se relève en un morphisme $\phi' : Y' \rightarrow X'$;
- (ii) le point $y' := c_{Y'}(v)$ est de codimension 1 ;
- (iii) $x' := \phi'(y')$ est aussi de codimension 1.

Si on note E et F l'adhérence de y' et x' respectivement, F est Cartier au voisinage de y' , et $e(v) := \text{ord}_E(\phi'^*F)$ est donc bien défini. On vérifie alors aisément que $\phi(v) = \text{ord}_F$.

La surjectivité se démontre de façon similaire. \square

Proposition 6.19. *Soit (X, Δ) une paire et $\phi : Y \rightarrow X$ un morphisme propre surjectif génériquement fini. Si on définit Δ_Y sur Y par $\phi^*(K_X + \Delta) = K_Y + \Delta_Y$, alors*

$$A_{(Y, \Delta_Y)}(v) = e(v)A_{(X, \Delta)}(\phi(v)).$$

pour toute valuation divisorielle v sur Y . En particulier, (X, Δ) est lc (resp. klt) ssi (Y, Δ_Y) l'est.

Démonstration. Avec les notations de la preuve du lemme 6.18, le morphisme $\mathcal{O}_{X', x'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y', y'}$ a pour indice de ramification $e(v)$, et on déduit facilement que

$$\text{ord}_E(K_{Y'} - (\phi')^*K_{X'}) = e(v) - 1,$$

(formule de Riemann-Hurwitz) ; on note que le membre de gauche fait sens puisque Y' est régulier au voisinage de $y' = \phi'(x')$. Puisque $\text{ord}_E(\phi^*f) = e(v)\text{ord}_F(f)$ pour toute $f \in K(X)$, on en déduit

$$\text{ord}_E(K_{Y'}) = e(v)\text{ord}_F(K_{X'}) + e(v) - 1,$$

ainsi que $\text{ord}_E(K_Y + \Delta_Y) = e(v)\text{ord}_F(K_X + \Delta)$. On obtient donc

$$1 + \text{ord}_E(K_{Y'/(Y, \Delta_Y)}) = e(v)(1 + \text{ord}_F(K_{X'/(X, \Delta)})),$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 6.20. *Si $\pi : Y \rightarrow X$ est un revêtement fini galoisien, alors Y klt (resp. lc) implique X klt (resp. lc), la réciproque étant valable si π est étale en codimension 1.*

Démonstration. La formule de Riemann-Hurwitz s'écrit en effet $K_Y = \pi^*(K_X + \Delta)$ avec

$$\Delta := \sum_E \left(1 - \frac{1}{m_E}\right) E.$$

où m_E est l'ordre de ramification de π en tout point la fibre au dessus du point générique de E . \square

En combinant ceci avec la proposition 5.4, on obtient :

Corollaire 6.21. *Toute variété X à singularités klt est localement le quotient d'une variété à singularités canoniques par un groupe cyclique.*

6.5. Exposants de singularité et places log-canoniques.

Théorème 6.22. *Soit (X, Δ) une paire klt, et $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal fractionnaire. Alors il existe $C > 0$ telle que $v(\mathfrak{a}) \leq CA_{(X, \Delta)}(v)$ pour toute valuation divisorielle v .*

Démonstration. Soit $\pi : X' \rightarrow X$ l'éclatement normalisé de \mathfrak{a} et F le diviseur de X' tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$. Notons que $v(F) = v(\mathfrak{a})$ pour toute valuation divisorielle v .

Par définition, $\Delta' := -K_{X'/(X, \Delta)}$ est l'unique \mathbb{Q} -diviseur de Weil sur X' tel que $\pi^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$ et $\pi_*\Delta' = \Delta$. On obtient ainsi une paire (X', Δ') telle que $A_{(X, \Delta)} = A_{(X', \Delta')}$, de sorte que (X', Δ') est aussi klt. D'après le corollaire 6.15, $(X', \Delta' + \varepsilon F)$ reste klt pour $0 < \varepsilon \ll 1$. Pour toute valuation divisorielle v , on a donc

$$0 \leq A_{(X', \Delta' + \varepsilon F)}(v) = A_{(X', \Delta')}(v) - \varepsilon v(F) = A_{(X, \Delta)}(v) - \varepsilon v(\mathfrak{a}),$$

d'où le résultat. \square

On peut donc introduire :

Définition 6.23. On définit l'*exposant de singularité* d'un idéal fractionnaire $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ sur une paire klt (X, Δ) comme

$$\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a}) := \sup_v \frac{v(\mathfrak{a})}{A_{(X, \Delta)}(v)} \in \mathbb{R}$$

Notons que l'exposant de singularité est homogène, au sens où

$$\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a}^m) = m\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a})$$

pour $m \in \mathbb{N}$. Ceci découle en effet immédiatement de $v(\mathfrak{a}^m) = mv(\mathfrak{a})$. On pose donc de façon formelle

$$\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a}^c) := c\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a})$$

pour tout rationnel $c > 0$. Ceci définit en particulier l'exposant de singularité de tout \mathbb{Q} -diviseur F , qui satisfait

$$\lambda_{(X,\Delta)}(F) = \sup_v \frac{v(F)}{A_{(X,\Delta)}(v)}.$$

Si F est effectif et $c > 0$, on voit donc que $(X, \Delta + cF)$ est klt ssi $c < \lambda_{(X,\Delta)}(F)$.

Définition 6.24. Soit (X, Δ) une paire lc. Une *place lc* de (X, Δ) est une valuation divisorielle v telle que $A_{(X,\Delta)}(v) = 0$. On appelle *centre lc* de (X, Δ) l'adhérence du centre $c_X(v)$ d'une place lc, et *lieu non-klt* de (X, Δ) la réunion des centres log-canoniques de (X, Δ) .

Théorème 6.25. Soit (X, Δ) une paire lc et $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) . Une valuation divisorielle v est une place log-canonique de (X, Δ) ssi v est monomiale relativement à $\sum_{i \in J} D_i$, où $(D_i)_{i \in J}$ est la famille des composantes de D telles que v_i soit une place log-canonique de (X, Δ) .

En particulier, le lieu non-klt de (X, Δ) est fermé, et l'ensemble des places log-canoniques est de cardinal 0, 1 ou infini.

Démonstration. Le lemme 6.14 nous ramène de suite au cas d'une paire log-lisse, traité ci-dessous. \square

Lemme 6.26. Soit (X, D) une paire log-lisse, et v une valuation divisorielle. Alors v est une place lc pour (X, D) ssi v est monomiale relativement à D .

Démonstration. Soit w la valuation monomiale relativement à D telle que $c_X(v)$ soit une spécialisation de $c_X(w)$ et de poids $w(D_i) = v(D_i)$ pour tout i , et supposons que v et w ne sont pas proportionnelles. On peut trouver une log-résolution $\pi : (X', D') \rightarrow X$ de (X, D) qui soit localement monomiale relativement à D et telle que w soit un multiple de ord_F pour une composante F de D' . Puisque (X, D) est lc, le lemme 6.14 donne

$$A_{(X,D)}(v) \geq A_{(X',D')}(v),$$

et il suffit donc de montrer que $A_{(X',D')}(v) = A_{X'}(v) - v(D') > 0$.

Comme π est localement monomiale relativement à D , on a $w(E) = v(E)$ pour toute composante E de D' , et F' est donc l'unique composante de D' contenant $c_X(v)$, d'où $v(D') = v(F)$. Par ailleurs, $v \neq \text{ord}_F$ montre que $c_X(v) \in F$ n'est pas générique dans F , et on peut donc trouver un diviseur local F' passant par $c_X(v)$ tel que $F + F'$ soit à croisements normaux simples en $c_X(v)$. Par le lemme 6.13, on en déduit

$$A_{X'}(v) \geq v(F) + v(F') > v(F) = v(D').$$

\square

Corollaire 6.27. Soit \mathfrak{a} un idéal fractionnaire sur une paire klt (X, Δ) et $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) et \mathfrak{a} . Alors l'ensemble $(D_i)_{i \in J}$ des composantes de D telles que

$$\lambda_{(X,\Delta)}(\mathfrak{a}) = \frac{v_i(\mathfrak{a})}{A_{(X,\Delta)}(v_i)}$$

est non-vide, et une valuation divisorielle v satisfait

$$\lambda_{(X,\Delta)}(\mathbf{a}) = \frac{v(\mathbf{a})}{A_{(X,\Delta)}(v)}$$

ssi elle est monomiale relativement à $\sum_{i \in J} D_i$.

En particulier, $\lambda_{(X,\Delta)}(\mathbf{a})$ est rationnel.

Corollaire 6.28. *Si (X, Δ) est une paire klt, alors l'ensemble des valuations divisorielles v telles que $A_{(X,\Delta)}(v) \leq 1$ est fini.*

Démonstration. Soit $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) , et soit v une valuation divisorielle exceptionnelle sur X telle que $A_{(X,\Delta)}(v) \leq 1$. D'après le lemme 6.14, on a

$$A_{(X',D)}(v) + \sum_i A_{(X,\Delta)}(v_i)v(D_i) = A_{(X,\Delta)}(v) \leq 1.$$

Si $c_{X'}(v) \notin D$, alors $c_X(v) \in X \setminus \text{supp } \Delta$ est un point lisse, et donc $A_{(X,\Delta)}(v) \geq \text{codim } x \geq 2$, contradiction. On a donc $v(D_i) > 0$ pour au moins un i , et donc $A_{(X',D)}(v) < 1$. Puisque $A_{(X',D)}(v)$ est un entier ($K_{X'} + D$ étant Cartier), le lemme 6.26 montre que v est monomiale relativement à D , donc déterminée par les $v(D_i) \in \mathbb{N}$. Or ces derniers ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, puisque $\sum_i A_{(X,\Delta)}(v_i)v(D_i) \leq 1$ avec $A_{(X,\Delta)}(v_i) > 0$ pour tout i . \square

Corollaire 6.29. *Si (X, Δ) est klt, alors il existe une log-résolution $\pi : (X', D) \rightarrow X$ de (X, Δ) telle que*

$$\pi^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta' + \sum_i a_i D_i$$

avec $a_i < 1$ et telle que les D_i ayant $a_i \leq 0$ soient deux à deux disjoints.

7. LE THÉORÈME D'ANNULATION DE KAWAMATA-VIEHWEG

Le but de cette partie est de décrire les grandes étapes de la preuve d'une forme générale du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, en suivant [KMM87, §1.2].

On se donne un schéma intègre T , de type fini sur un corps k de caractéristique nulle.

Théorème 7.1. *Soit (X, Δ) une paire klt avec Δ effectif et $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre surjectif. Si L un diviseur sur X tel que $L - (K_X + \Delta)$ soit T -gros et T -nef, alors $R^q \pi_* \mathcal{O}_X(L) = 0$ pour tout $q \geq 1$.*

Démonstration. On procède en six étapes, par ordre croissant de généralité.

Étape 1 : $T = \text{Spec } k$, X est lisse sur k , $\Delta = 0$ et $L - K_X$ est ample.

Pour $k = \mathbb{C}$, c'est précisément l'énoncé du théorème d'annulation de Kodaira. Dans le cas général, X et L descendent à un sous-corps de k qui est de type fini sur \mathbb{Q} , donc se plonge dans \mathbb{C} ; on conclut par changement de base fidèlement plat. On peut aussi appliquer directement la preuve purement algébrique due à

Deligne, Illusie et Raynaud [DI87, Corollaire 2.11].

Etape 2 : $T = \text{Spec } k$, X est lisse sur k , $\text{supp } \Delta$ est un diviseur SNC et $L - (K_X + \Delta)$ est ample.

On va se ramener à l'étape 1 via le «covering trick» suivant (cf. [KMM87, p.304]).

Lemme 7.2. *Soit X un k -schéma projectif lisse, D un diviseur à croisements normaux simples, et E un diviseur réduit quelconque sans composante commune avec D .*

Pour tout $r \geq 1$, il existe un revêtement ramifié galoisien $p : X' \rightarrow X$ avec X' lisse sur k , tel que p soit non-ramifié le long des composantes de E et que l'indice de ramification de p le long de chaque composante de D soit égal à r .

La décomposition irréductible de $A := L - (K_X + \Delta)$ peut s'écrire

$$(7.1) \quad A = \sum_i (m_i + \varepsilon_i) D_i + \sum_j n_j E_j$$

avec $m_i, n_j \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$, $D := \sum_i D_i$ est un diviseur SNC et $E := \sum_j E_j$ est sans composante commune avec D . On leur applique le lemme 7.2 avec $r \geq 1$ choisi tel que $r\varepsilon_i$ soit entier pour tout i , et on va montrer que :

(i) p^*A est à coefficients entiers ;

(ii) $\mathcal{O}_X(K_X + \lceil A \rceil)$ s'identifie à la partie Galois-invariante de $p_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + p^*A)$.

Le point (i) est immédiat, puisqu'on voit aisément que

$$p^*D_i = r(p^*D_i)_{\text{red}}$$

en raisonnant au dessus de point générique de D_i .

Si on note B_l les autres composantes du diviseur de ramification de p sur X et r_l l'indice de ramification au point générique de B_l , la formule de Riemann-Hurwitz donne

$$(7.2) \quad K_{X'} = p^* \left(K_X + \sum_i \left(1 - \frac{1}{r} \right) D_i + \sum_l \left(1 - \frac{1}{r_l} \right) B_l \right).$$

On a choisi ici une forme rationnelle de degré maximal Ω sur X , et noté K_X son diviseur et $K_{X'}$ celui de $p^*\Omega$. Notons que $B_l \neq E_j$ pour tout l, j puisque p est non-ramifié le long de chaque E_j .

D'après (7.2), une section Galois-invariante de $p_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + p^*A)$ sur un ouvert $U \subset X$ correspond à une fonction rationnelle $f \in K(X)$ telle que

$$\text{div}(f) + K_X + \sum_i \left(1 - \frac{1}{r} \right) D_i + \sum_j \left(1 - \frac{1}{r_l} \right) B_l + A \geq 0$$

sur U . Puisque $\text{div}(f) + K_X$ est à coefficients entiers, ceci revient à

$$\text{div}(f) + K_X + \sum_i (m_i + 1 + \lfloor \varepsilon_i - \frac{1}{r} \rfloor) D_i + \sum_j n_j E_j \geq 0$$

grâce à (7.1). Mais $r\varepsilon_i$ étant un entier strictement positif, on a $0 \leq \varepsilon_i - \frac{1}{r} < 1$; il reste donc

$$\operatorname{div}(f) + K_X + [A] \geq 0$$

sur U , ce qui démontre (ii).

Puisque p^*A est ample et à coefficients entiers, l'étape 1 (i.e. le théorème d'annulation de Kodaira) donne $H^q(X', K_{X'} + p^*A) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Comme p est un morphisme fini, les images directes supérieures de $\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + p^*A)$ sont nulles. La suite spectrale de Leray est donc dégénérée, et on obtient

$$H^q(X, p_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + p^*A)) = 0.$$

Mais la caractéristique de k , étant nulle, ne divise par l'ordre du groupe de Galois de p , et (ii) ci-dessus implique donc que $\mathcal{O}_X(K_X + [A])$ est un facteur direct de $p_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + p^*A)$, d'où le résultat.

Etape 3 : T est projectif sur k , X est lisse sur k , $\operatorname{supp} \Delta$ est SNC et $L - (K_X + \Delta)$ est T -ample.

On peut trouver un fibré en droites H sur T suffisamment ample pour que :

- (i) $L - (K_X + \Delta) + \pi^*H$ est (globalement) ample sur X ;
- (ii) $R^q\pi_*\mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{O}_T(H)$ est globalement engendré et acyclique sur T pour tout q .

Comme

$$R^q\pi_*\mathcal{O}_X(L + \pi^*H) \simeq R^q\pi_*\mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{O}_T(H)$$

par la formule de projection, la dégénérescence de la suite spectrale de Leray donne

$$H^q(X, L + \pi^*H) \simeq H^0(T, R^q\pi_*\mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{O}_T(H)).$$

L'étape 2 montre que le membre de gauche est nul pour $q \geq 1$. On obtient ainsi

$$R^q\pi_*\mathcal{O}_X(L) \otimes \mathcal{O}_T(H) = 0,$$

puisque ce faisceau est globalement engendré sur T , et on conclut grâce à l'inversibilité de $\mathcal{O}_T(H)$.

Etape 4 : X est lisse sur k , $\operatorname{supp} \Delta$ est SNC et $L - (K_X + \Delta)$ est T -ample.

L'énoncé étant local sur la base, on peut supposer que T est affine. On va se ramener à l'étape 3 en construisant une compactification $\pi' : X' \rightarrow T'$ de π et un \mathbb{Q} -diviseur A' sur X' tels que :

- (i) X' est lisse sur k ;
- (ii) A' est T' -ample, avec $\operatorname{supp} \bar{A}$ SNC et $A'|_X$ linéairement équivalente à $A := L - (K_X + \Delta)$.

Pour ce faire, on commence par choisir un entier $m \geq 1$ tel que mA soit très ample. Quitte à remplacer L par un diviseur linéairement équivalent, on dispose donc d'un plongement fermé $X \subset T \times \mathbb{P}_k^N$ tel que mA soit la restriction à X d'un hyperplan H de \mathbb{P}_k^N transverse à X .

Puisque T est affine, il admet un plongement fermé dans \mathbb{A}_k^d , donc l'adhérence dans \mathbb{P}_k^d fournit un plongement ouvert $T \subset T'$ dans un k -schéma intègre projectif. On note \bar{X} l'adhérence de X dans $T' \times_k \mathbb{P}_k^N$ et $\bar{A} := \frac{1}{m}H|_{\bar{X}}$.

Puisque (X, A) est log-lisse, le théorème de Hironaka permet de trouver une log-résolution de $\mu : X' \rightarrow \bar{X}$ de (\bar{X}, \bar{A}) qui soit obtenue en éclatant un sous-schéma fermé $Z \subset \bar{X} \setminus X$. On pose $F = \mu^{-1}(Z)$, qui est un diviseur effectif tel que $-F$ soit μ -ample.

Si on note $\pi' : X' \rightarrow T'$ et $\rho : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}_k^N$ les projections, on peut trouver un rationnel $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que $A' := \rho^*\bar{A} - \varepsilon F$ soit T' -ample.

Etape 5 : X projectif sur T .

D'après le corollaire 6.16, on peut supposer que $A := L - (K_X + \Delta)$ est T -ample, quitte à perturber légèrement Δ . Soit $\mu : X' \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) , de sorte qu'il existe par définition un diviseur effectif F μ -exceptionnel sur X' tel que $-F$ soit μ -ample. Puisque A est T -ample, $H_\varepsilon := \mu^*A - \varepsilon F$ l'est aussi pour tout rationnel $0 < \varepsilon \ll 1$.

Si on définit le \mathbb{Q} -diviseur Δ' sur X' par

$$\mu^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta',$$

alors $-\lfloor \Delta' \rfloor$ est effectif car (X, Δ) est klt, et il est aussi μ -exceptionnel puisque Δ est effectif, de sorte que

$$(7.3) \quad \mu_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) = \mathcal{O}_X$$

par le lemme 1.63. Puisque

$$\mu^*L - (K_{X'} + \Delta' + \varepsilon F) = H_\varepsilon$$

est T -ample et μ^*L est à coefficients entiers, l'étape 4 donne

$$R^q \pi'_* \mathcal{O}_{X'}(\mu^*L - \lfloor \Delta' + \varepsilon F \rfloor) = R^q \pi'_* \mathcal{O}_{X'}(\lceil \mu^*L - (\Delta' + \varepsilon F) \rceil) = 0$$

pour $q \geq 1$, avec $\pi' := \pi \circ \mu$. Notons que $\Delta' + \varepsilon F$ est à support dans un diviseur à croisements normaux simples, puisque μ est une log-résolution de (X, Δ) et F est μ -exceptionnel.

D'un autre côté, H_ε est a fortiori μ -ample, donc l'étape 4 appliquée à μ donne aussi

$$R^p \mu_* \mathcal{O}_{X'}(\mu^*L - \lfloor \Delta' + \varepsilon F \rfloor) = 0.$$

pour $p \geq 1$, et donc

$$R^q \pi_* (L \otimes \mu_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' + \varepsilon F \rfloor)) \simeq R^q \pi'_* \mathcal{O}_{X'}(\mu^*L - \lfloor \Delta' + \varepsilon F \rfloor) = 0$$

par dégénérescence de la suite spectrale de Leray. Si on choisit ε est suffisamment petit, alors $\lfloor \Delta' + \varepsilon F \rfloor = \lfloor \Delta' \rfloor$, et on conclut grâce à (7.3).

Etape 6 : le cas général.

D'après le lemme de Chow, on peut trouver un morphisme birationnel projectif $\mu : X' \rightarrow X$ tel que X' soit projectif sur T . Le théorème de résolution des

singularités de Hironaka permet de plus de supposer que X' est lisse sur k , et que Δ' défini comme ci-dessus par

$$\mu^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$$

est à support à croisements normaux simples. Ceci garantit que $(X', \Delta' - \lfloor \Delta' \rfloor)$ est klt, et l'étape 4 appliquée à $X' \rightarrow T$ et $X' \rightarrow X$ donne donc

$$R^p \pi'_* (\mu^* L - \lfloor \Delta' \rfloor) = 0$$

et

$$R^q \mu_* (\mu^* L - \lfloor \Delta' \rfloor) = 0$$

pour tous $p, q \geq 1$, puisque $\mu^* L$ est encore T -nef et T -big. On conclut comme à l'étape 5 en utilisant $\mu_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) = 0$ et la dégénérescence de la suite spectrale de Leray. \square

A titre d'illustration, on montre :

Théorème 7.3. *Soit (X, Δ) une paire lc avec Δ effectif, et supposons que (X, Δ) n'a qu'une seule place log-canonique v . Alors l'adhérence W de $c_X(v)$ est normale.*

Démonstration. Soit $\pi : (Y, D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) , et E l'unique composante de D telle que $A_{(X, \Delta)}(\text{ord}_E) = 0$, de sorte que $W = \pi(E)$. Si on note D_i les autres composantes de D , alors

$$K_Y + E = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_i (m_i - \varepsilon_i) D_i$$

avec $m_i \in \mathbb{N}$ et $0 < \varepsilon_i < 1$.

Notons de plus que chaque D_i avec $m_i \geq 1$ est π -exceptionnel, puisque Δ est effectif. Si on pose $F := \sum_i m_i D_i$ et $\Delta_Y := \sum_i \varepsilon_i E_i$, alors F est un diviseur effectif π -exceptionnel, (Y, Δ_Y) est klt, et

$$F - E - (K_Y + \Delta_Y) = \pi^*(K_X + \Delta)$$

est X -nef, et aussi X -gros puisque π est birationnelle. Le théorème 7.1 donne donc $R^1 \pi_* \mathcal{O}_Y(F - E) = 0$, d'où la surjectivité du morphisme de restriction

$$\pi_* \mathcal{O}_Y(F) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_E(F|_E).$$

Comme F est effectif et π -exceptionnel, on a $\pi_* \mathcal{O}_Y(F) = \mathcal{O}_Y$. Le terme de droite contient quant à lui \mathcal{O}_W , et on a donc $\pi_* \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_W$. Puisque E est normal, on en déduit que W est normal. \square

8. LE «BASEPOINT FREE THEOREM»

Dans ce qui suit, on fixe un schéma intègre T de type fini k sur un corps de caractéristique nulle, et on désigne par $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme

Théorème 8.1. *Soit (X, Δ) une paire klt avec Δ effectif et $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre surjectif. Si L un fibré en droites T -nef sur X tel que $aL - (K_X + \Delta)$ soit T -nef et T -gros pour un rationnel $a > 0$, alors mL est T -sans point base pour tout $m \gg 1$.*

En particulier, L est semiample, mais la conclusion est plus précise. Elle permet par exemple de montrer :

Corollaire 8.2. Soit (X, Δ) une paire klt avec Δ effectif, et soit $\pi : X \rightarrow Y$ une contraction telle que $-(K_X + \Delta)$ est Y -nef et Y -gros. Alors un fibré en droites L sur X est Y -numériquement trivial ssi il existe $M \in \text{Pic}(Y)$ tel que $L = \pi^*M$ dans $\text{Pic}(X)$.

8.1. Lemme de perturbation. Le résultat technique suivant, qui tente de résumer la «technique de perturbation» de Kawamata-Shokurov, joue un rôle essentiel dans la preuve des théorèmes du cône.

Lemme 8.3. Soit (X, Δ) une paire klt, \mathfrak{a} un idéal sur X et $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) et \mathfrak{a} ; notons F le diviseur effectif de X' tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-F)$.

Etant donné un morphisme projectif $X \rightarrow T$ et un \mathbb{Q} -diviseur T -ample A sur X , on peut trouver $c > 0$ arbitrairement proche de $\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a})^{-1}$ et une décomposition

$$\pi^*(K_X + \Delta + A) + cF = K_{X'} + E + \Delta' + A'$$

tels que

- (i) A' est T -ample;
- (ii) $E + \Delta'$ à support dans D , Δ' un \mathbb{Q} -diviseur à coefficients < 1 , et E irréductible tel que $\text{ord}_E(F) > 0$;
- (iii) $\mathcal{O}_X \subset \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-[\Delta']) \subset \mathcal{O}_X(-[\Delta])$.

On notera que $[\Delta] \leq 0$, puisque (X, Δ) est klt.

Démonstration. Puisqu'on demande à une log-résolution d'être l'éclatement d'un sous-schéma de codimension au moins 2, il existe un diviseur π -exceptionnel et π -ample G . Comme A est T -ample, $\pi^*A - \delta G$ est aussi T -ample pour tout $0 < \delta \ll 1$. L'amplitude étant une condition ouverte, on en déduit l'existence de rationnels $\varepsilon_i > 0$ arbitrairement petits tels que $A' := \pi^*A - \sum_i \varepsilon_i D_i$ soit T -ample et tels que le max des $\frac{v_i(F)}{A_{(X, \Delta)}(v_i) - \varepsilon_i}$ soit atteint pour un unique indice i_0 . Si on pose

$$c := \left(\max_i \frac{v_i(F)}{A_{(X, \Delta)}(v_i) - \varepsilon_i} \right)^{-1} = \min_{v_i(F) > 0} \frac{A_{(X, \Delta)}(v_i) - \varepsilon_i}{v_i(F)},$$

alors c est arbitrairement proche de l'inverse de

$$\lambda_{(X, \Delta)}(\mathfrak{a}) = \max_i \frac{v_i(F)}{A_{(X, \Delta)}(v_i)}.$$

On obtient la décomposition souhaitée en posant $E = D_{i_0}$ et $\Delta' := \sum_{i \neq i_0} a_i D_i$ avec

$$a_i := c v_i(F) - v_i(K_{X'/(X, \Delta)}) + \varepsilon_i.$$

On a en effet

$$a_i = 1 + c v_i(F) - A_{(X, \Delta)}(v_i) + \varepsilon_i \leq 1$$

pour tout i par définition de c , et l'égalité n'est atteinte que pour $i = i_0$.

Pour le point (iii), $[\Delta'] \leq 0$ implique

$$\mathcal{O}_X = \pi_*\mathcal{O}_{X'} \subset \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-[\Delta']).$$

D'un autre côté, on a par construction

$$v_i(\Delta') = c v_i(F) - v_i(K_{X'/(X, \Delta)}) + \varepsilon_i$$

pour $D_i \neq E$, et donc $v_i(\Delta') \geq v_i(\Delta)$ si $D_i \neq E$ est la transformée stricte d'une composante de Δ . Puisque $\lfloor \Delta \rfloor \leq 0$, on en déduit $\pi_* \lfloor \Delta' \rfloor \geq \lfloor \Delta \rfloor$, et donc

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) \subset \mathcal{O}_X(-\pi_* \lfloor \Delta' \rfloor) \subset \mathcal{O}_X(-\lfloor \Delta \rfloor).$$

□

8.2. Le théorème de non-annulation. On va montrer le théorème suivant.

Théorème 8.4. *Soit (X, Δ) une paire klt avec X propre sur k . Si L est un fibré en droites nef sur X tel que $aL - (K_X + \Delta)$ soit nef et gros pour un rationnel $a > 0$, alors*

$$H^0(X, mL - \lfloor \Delta \rfloor) \neq 0$$

pour tout $m \gg 1$.

Rappelons que $\lfloor \Delta \rfloor \leq 0$, puisque la condition klt implique que Δ est à coefficients < 1 .

Démonstration. On pose $n := \dim X$.

On commence par montrer qu'on peut supposer $(X, \text{supp } \Delta)$ log-lisse. Passer à log-résolution $X' \rightarrow X$, introduire Δ' tel que $\pi^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$, et utiliser $\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) \subset \mathcal{O}_X(-\lfloor \Delta \rfloor)$.

Étape 1 : dichotomie. Si L est numériquement trivial, le théorème 7.1 donne

$$H^q(X, mL - \lfloor \Delta \rfloor) = H^q(X, -\lfloor \Delta \rfloor) = 0$$

pour tout $m \geq a$ et $q \geq 1$, et donc

$$h^0(X, mL - \lfloor \Delta \rfloor) = \chi(X, mL - \lfloor \Delta \rfloor) = \chi(X, -\lfloor \Delta \rfloor) = h^0(X, -\lfloor \Delta \rfloor) \neq 0$$

par Riemann-Roch.

Sinon, il existe $m_0 \geq 1$ tel que $(m_0L + A)^n > n^n$. En appliquant le lemme 8.5 avec $x \in X \setminus \text{supp } \Delta$ un point fermé régulier, on obtient un \mathbb{Q} -diviseur effectif $F \sim_{\mathbb{Q}} m_0L + A$ tel que $\text{ord}_x(F) > n$. D'après l'exemple 6.8, on a donc

$$A_{(X, \Delta + F)}(\text{ord}_x) = A_X(\text{ord}_x) - \text{ord}_x(F) = n - \text{ord}_x(F) > 0,$$

ce qui implique $\lambda_{(X, \Delta)}(F) > 1$.

Étape 2 : extension de sections. Par hypothèse, il existe un \mathbb{Q} -diviseur ample A tel que $aL = K_X + \Delta + 2A$. Si on se donne une log-résolution $\pi : (X', D) \rightarrow X$ de (X, Δ) et F , le lemme 8.3 permet de trouver $c < 1$ et un \mathbb{Q} -diviseur ample A' tel que

$$\pi^*(K_X + \Delta + A + cF) = K_{X'} + E + \Delta' + A'$$

avec $E + \Delta'$ à support dans D , E irréductible et Δ' à coefficients < 1 . Comme L est nef et $F \equiv m_0L + A$, ceci montre que

$$\pi^*(mL) - (K_{X'} + E + \Delta')$$

est ample pour tout $m \geq a + cm_0$. Par adjonction,

$$\pi^*(mL)|_E - (K_E + \Delta'|_E)$$

est ample, et l'hypothèse de récurrence donne donc $H^0(E, \pi^*(mL)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor_E) \neq 0$ pour tout $m \gg 1$.

Notons que $\lfloor \Delta' \rfloor_E = \lfloor \Delta' \rfloor|_E$. Puisque $(X', \Delta' - \lfloor \Delta' \rfloor)$ est klt avec un bord effectif, le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg montre que

$$H^1(X', \pi^*(mL) - \lfloor \Delta' \rfloor - E) = 0,$$

d'où la surjectivité du morphisme de restriction

$$H^0(X', \pi^*(mL) - \lfloor \Delta' \rfloor) \rightarrow H^0(E, \pi^*(mL)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor_E).$$

Grâce à la formule de projection, on obtient

$$H^0(X', \pi^*(mL) - \lfloor \Delta' \rfloor) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor)) \neq 0$$

pour tout $m \gg 1$. On obtient donc

$$0 \neq H^0(X, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathcal{O}_X(-\lfloor \Delta \rfloor)).$$

Mais le lemme 8.3 assure de plus que

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) \subset \mathcal{O}_X(-\lfloor \Delta \rfloor),$$

d'où le résultat. \square

Lemme 8.5. *Soit D un \mathbb{Q} -diviseur ample tel que $(D^n) > \alpha^n$, et $x \in X$ un point fermé lisse. Alors il existe un \mathbb{Q} -diviseur effectif $F \sim_{\mathbb{Q}} D$ tel que $\text{ord}_x(F) > \alpha$.*

Démonstration. On pose $n = \dim X$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que mD soit à coefficients entiers et tout $k \in \mathbb{N}$, la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(mD) \otimes \mathfrak{m}_x^k) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^k) \otimes \mathcal{O}_X(mD)$$

montre que

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mD) \otimes \mathfrak{m}_x^k) \geq \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) - \dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^k).$$

D'un côté, Riemann-Roch et l'annulation de Serre donnent

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) = \frac{m^n}{n!} (D^n) + O(m^{n-1}).$$

D'un autre côté, puisque $x \in X$ est un point lisse, on a

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^k) = h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k-1)) = \binom{n+k-1}{n} = \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1}).$$

En prenant $k = \lceil m\alpha \rceil$, et en comparant les deux termes dominants, on obtient pour $m \gg 1$ l'existence d'une section non-nulle $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(mD) \otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil m\alpha \rceil})$.

Il reste à poser $F := \frac{1}{m} \text{div}(s)$. \square

8.3. Démonstration du théorème 8.1. On peut supposer que T est affine.

Le corollaire 6.16 permet aussi de supposer que $A := aL - (K_X + \Delta)$ est T -ample. Le théorème 8.4 montre que $\mathcal{H}^0(X/T, mL) \neq 0$ pour tout $m \gg 1$, de sorte que le T -idéal de base \mathfrak{b}_m est non-nul pour tout $m \gg 1$.

Supposons qu'il existe $m_0 \geq 1$ tel que m_0L ne soit pas T -globalement engendré, i.e. $\mathfrak{b}_{m_0} \neq \mathcal{O}_X$, et soit $\pi : (X', D) \rightarrow X$ une log-résolution de (X, Δ) et de \mathfrak{b}_{m_0} . Si on note F le diviseur effectif de X' tel que $\mathcal{O}_{X'}(-F) = \mathcal{O}_{X'} \cdot \mathfrak{b}_{m_0}$, le lemme 8.3 permet de trouver $c > 0$ et un \mathbb{Q} -diviseur T -ample A' tels que

$$(8.1) \quad \pi^*(K_X + \Delta + A) + cF = K_{X'} + E + \Delta' + A'$$

avec $E + \Delta'$ à support dans D , Δ' à coefficients < 1 et E irréductible tel que $\text{ord}_E(F) > 0$.

Puisque F est égal à la partie fixe du système linéaire $\mathcal{H}^0(X/T, \pi^*(m_0L))$, $\pi^*(m_0L) - F$ est T -sans point base, donc en particulier T -nef. En substituant $aL = K_X + \Delta + A$ dans (8.1), il en résulte que $\pi^*(mL) - (K_{X'} + E + \Delta')$ est T -ample pour tout $m \geq a + cm_0$. Par la version relative du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, on a donc

$$H^1(X'/T, \pi^*(mL) - E - \lfloor \Delta' \rfloor) = 0,$$

de sorte que le morphisme de restriction

$$H^0(X'/T, \pi^*(mL) - \lfloor \Delta' \rfloor) \rightarrow H^0(E/T, \pi^*(mL)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor|_E)$$

est surjectif. Mais

$$\pi^*(mL)|_E - (K_E + \Delta'|_E) = (\pi^*(mL) - (K_{X'} + E + \Delta'))|_E$$

est T -ample par adjonction, et une nouvelle application du théorème 8.4 donne donc

$$H^0(E/T, \pi^*(mL)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor|_E) \neq 0$$

pour tout $m \gg 1$. Il en résulte que $v := \text{ord}_E$ s'annule sur l'élément général de

$$H^0(X'/T, \pi^*(mL) - \lfloor \Delta' \rfloor) \simeq H^0(X/T, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor)).$$

Mais

$$\mathcal{O}_X \subset \pi_* \mathcal{O}_{X'}(-\lfloor \Delta' \rfloor) \subset \mathcal{O}_X(-\lfloor \Delta \rfloor) = \mathcal{O}_X$$

d'après le lemme 8.3, et on a donc $v(\mathfrak{b}_m) = 0$ pour tout $m \gg 1$. Comme $v(\mathfrak{b}_{m_0}) = \text{ord}_E(F) > 0$, on conclut grâce au lemme ci-dessous.

Lemme 8.6. *Soit $\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_m$ une suite graduée d'idéaux telle que $\mathfrak{a}_m \neq 0$ pour tout $m \gg 1$, et supposons que pour tout m_0 tel que $\mathfrak{a}_{m_0} \neq \mathcal{O}_X$, il existe une valuation divisorielle v telle que $v(\mathfrak{a}_{m_0}) > 0$ et $v(\mathfrak{a}_m) = 0$ pour tout $m \gg 1$. Alors $\mathfrak{a}_m = \mathcal{O}_X$ pour tout $m \gg 1$.*

Démonstration. Soit $Z_m \subset X$ le fermé des zéros de \mathfrak{a}_m (avec sa structure réduite). Si m divise m' , alors $\mathfrak{a}_m^{m'/m} \subset \mathfrak{a}_{m'}$, et donc $Z_{m'} \subset Z_m$; par noethérianité, il en résulte que pour tout $a \geq 1$ il existe N_a tel que Z_{a^N} est indépendant de $N \geq N_a$. L'hypothèse implique que $Z_{a^{N_a}}$ est vide; sinon, il existerait v telle que $c_X(v) \in Z_{a^{N_a}} \setminus Z_{a^N}$ pour $N \gg 1$, contradiction.

En appliquant ce qui précède à deux entiers consécutifs, disons 2 et 3, on obtient l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $Z_{2^N} = Z_{3^N} = \emptyset$. Puisque 2^N et 3^N sont

premiers entre eux, le semigroupe $\mathbb{N}2^N + \mathbb{N}3^N$ contient tous les entiers $m \gg 1$, qui peuvent donc s'écrire $m = c2^N + d3^N$ avec $c, d \in \mathbb{N}$. Mais on a

$$\mathfrak{a}_{2^N}^c \cdot \mathfrak{a}_{3^N}^d \subset \mathfrak{a}_m$$

d'où $Z_m \subset Z_{2^N} \cup Z_{3^N} = \emptyset$. \square

9. LE THÉOREME DU CÔNE

9.1. Rationalité.

Théorème 9.1. *Soit (X, Δ) une paire klt avec Δ effectif, et $\pi : X \rightarrow T$ un morphisme propre surjectif tel que $K_X + \Delta$ ne soit pas T -nef. Si A est un diviseur T -nef et T -gros sur X , alors*

$$r(A) := \sup \{ t \in \mathbb{R} \mid A + t(K_X + \Delta) \text{ est } T\text{-nef} \} \in [0, +\infty[$$

est rationnel, de dénominateur au plus $a(n+1)$ si $a \geq 1$ est choisi de sorte que $a(K_X + \Delta)$ soit Cartier.

La preuve repose sur le critère de rationalité élémentaire qui suit.

Lemme 9.2. *Soient $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$, et posons $\lambda(x, y) := xa - yr$. Supposons donnés $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que*

$$S_{N, \varepsilon} := \{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p, q \geq N \text{ et } 0 < \lambda(p, q) < \varepsilon \}$$

soit contenu dans $\{P = 0\}$ pour un polynôme non-nul $P \in \mathbb{C}[x, y]$. Alors r est rationnel, de dénominateur borné par $a(1 + \deg P)/\varepsilon$.

Démonstration. On pose $d := \deg P$. Quitte à diviser r et ε par a , on peut supposer que $a = 1$. Supposons par l'absurde que r est irrationnel, de sorte qu'il existe

$$(p, q) \in S_{N, \varepsilon'}$$

pour tout choix de $\varepsilon' \leq \varepsilon/(d+1)$. Pour $k = 1, \dots, d+1$, on a alors $(kp, kq) \in S_{N, \varepsilon}$, ce qui fournit $\deg P + 1$ racines de P sur la droite $qx - py = 0$. Il en résulte que $qx - py$ divise P , et on obtient une contradiction en itérant ceci.

Ayant montré que r est rationnel, on peut écrire $r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Supposons par l'absurde que $d+1 < q\varepsilon$. Pour chaque $k = 1, \dots, d+1$, on peut écrire $k = up - bv$ avec $u, v \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(u+mp) - r(v+mq) = k/q < \varepsilon$ ce qui implique que la restriction de P à la droite $x - ry - \frac{k}{q}$ divise P . Ceci est valable pour $k = 1, \dots, d+1$, ce qui contredit $\deg P = d$. \square

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on pose $\lambda(p, q) := pa - qr$ et

$$D(p, q) := pa(K_X + \Delta) + qA.$$

A partir de la définition de r , on voit aisément que

- (i) $\lambda(p, q) < 1 \iff D(p, q) - (K_X + \Delta)$ T -ample;
- (ii) $\lambda(p, q) \leq 0 \iff D(p, q)$ T -nef;
- (iii) il existe $C \gg 1$ tel que $\lambda(p, q) \leq -C \implies D(p, q)$ T -très ample.

Etape 1. On pose $S_N := S_{N,1}$, avec les notations du lemme 9.2. En utilisant la propriété (iii) ci-dessus, on va montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble base $B_{D(p,q)}$ de $D(p,q)$ soit indépendant de $(p,q) \in S_{N_0}$.

En effet, étant donnés $N \in \mathbb{N}$ et $(p,q) \in S_N$, il existe $k \gg 1$ tel que $k\lambda(p,q) \geq C + 1$. Si on pose $N' := \max(kp, kq)$, ceci montre chaque $(p', q') \in S_{N'}$ satisfait $\lambda(p' - kp, q' - kq) \leq -C$ et $(p' - kp, q' - kq) \in \mathbb{N}^2$, et donc

$$B_{D(p',q')} \subset B_{kD(p,q)} \subset B_{D(p,q)}$$

par (iii). Par conséquent, pour $(p_i, q_i) \in S_N$, $i = 1, 2$, il existe $N' \gg 1$ tel que

$$B_{D(p_3, q_3)} \subset B_{D(p_1, q_1)} \cap B_{D(p_2, q_2)},$$

pour tout $(p_3, q_3) \in S_{N'}$, et on conclut aisément par noethérianité.

Etape 2. Soit N_0 donné par l'étape 1. S'il existe $(p_0, q_0) \in S_{N_0}$ tel que

$$\mathcal{H}^0(X/T, D(p_0, q_0)) \neq 0,$$

on passe à l'étape 3. Dans le cas contraire, on note X_η la fibre générique géométrique de $X \rightarrow T$. La propriété (i) montre que $D(p, q)|_{X_\eta} - (K_{X_\eta} + \Delta|_{X_\eta})$ est ample, et le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg donne donc

$$h^0(X_\eta, D(p, q)|_{X_\eta}) = \chi(X_\eta, D(p, q)|_{X_\eta}) =: P(p, q),$$

un polynôme de degré au plus n par le théorème de Riemann-Roch. Puisque P s'annule sur S_{N_0} , le lemme 9.2 implique que r est rationnel de dénominateur au plus $(n+1)a$, et on a terminé.

Etape 3. On choisit une log-résolution $\pi : (X', \Delta) \rightarrow X$ de (X, Δ) et de l'idéal de base de $D(p_0, q_0)$, et on note $F \geq 0$ le diviseur correspondant sur X' . Le lemme 8.3 appliqué à $A := D(p_0, q_0) - (K_X + \Delta)$, qui est T -ample par (i), permet d'écrire comme précédemment

$$\pi^*(K_X + \Delta + A) + cF = K_{X'} + E + \Delta' + A'.$$

Soit $N := \max((1+c)p_0, (1+c)q_0)$ et $\varepsilon := \lambda(p_0, q_0)$. Pour chaque $(p, q) \in S_{N, \varepsilon}$, on voit facilement que $\pi^*D(p, q) - (K_{X'} + E + \Delta')$ est T -ample en utilisant (ii) ci-dessus, d'où la surjectivité de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(X/T, D(p, q)) &\simeq H^0(X'/T, \pi^*D(p, q) - \lfloor \Delta' \rfloor) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(E/T, \pi^*D(p, q)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor). \end{aligned}$$

Mais puisque $(p, q) \in S_{N, \varepsilon} \subset S_{N_0}$, on a $B_{D(p,q)} = B_{D(p_0, q_0)}$ d'après l'étape 1. Comme $B_{D(p_0, q_0)}$ contient $c_X(\text{ord}_E)$, il vient

$$H^0(E/T, \pi^*D(p, q)|_E - \lfloor \Delta' \rfloor|_E) = 0.$$

En notant E_η la fibre générique géométrique de $E \rightarrow f(E) \subset T$, ceci se réécrit

$$Q(p, q) := \chi(E_\eta, \pi^*D(p, q)|_{E_\eta} - \lfloor \Delta' \rfloor|_{E_\eta}) = h^0(E_\eta, \pi^*D(p, q)|_{E_\eta} - \lfloor \Delta' \rfloor|_{E_\eta}) = 0,$$

par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg. On a donc trouvé un polynôme Q de degré au plus $n-1$ tel que $Q(p, q) = 0$ pour tout $(p, q) \in S_{N, \varepsilon}$ avec $\varepsilon := \lambda(p_0, q_0)$.

D'après le lemme 9.2, ceci implique déjà que r est rationnel. Afin d'obtenir un contrôle sur son dénominateur, on recommence le raisonnement précédent avec $(p_1, q_1) \in S_{N_0}$ choisi de sorte que $\lambda(p_1, q_1) = \max_{S_{N_0}} \lambda$, qui existe puisque λ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur S_{N_0} lorsque r est rationnel. Puisque $\lambda(p, q) \leq \lambda(p_1, q_1)$ est satisfait pour tout $(p, q) \in S_N \subset S_{N_0}$, on obtient $Q(p, q) = 0$ pour tout $(p, q) \in S_N$, et le lemme 9.2 montre que le dénominateur de r est borné par $a(n+1)$.

9.2. Le théorème du cône.

Définition 9.3. Un cône convexe C d'un \mathbb{R} -espace vectoriel défini sur \mathbb{Q} est *localement rationnellement polyédral* en $x \in C$ ssi il existe un voisinage conique U de x et un nombre fini de formes linéaires $y_i \in C^* \cap V_{\mathbb{Q}}$ telles que

$$C \cap U = \bigcap_i \{y_i \geq 0\} \cap U$$

10. MISE EN OEUVRE DU MMP

Lemme 10.1. Soient X et Y deux T -schémas,

Lemme 10.2. Soit (X, Δ) une paire klt avec X \mathbb{Q} -factoriel, et $\pi : X \rightarrow Y$ une contraction extrémale (i.e. $\rho(X/Y) = 1$) avec $-(K_X + \Delta)$ est Y -ample. Alors Y est \mathbb{Q} -factoriel ssi $\dim X > \dim Y$ (contraction fibrante) ou $\dim X = \dim Y$ et $\text{codim Exc}(\pi) = 1$ (contraction divisorielle).

Démonstration. Notons d'abord que Y est normal puisque X l'est, cf. lemme 3.9. D'après le lemme 1.47, Y ne peut être \mathbb{Q} -factorielle si π est une petite contraction. \square

flip extremaux preservent \mathbb{Q} -factorialité.

RÉFÉRENCES

- [BKS] Bauer, Küronya, Szemberg : Zariski chambers...
- [BCL] S. Boucksom, S. Cacciola, A. Lopez : Augmented base loci and restricted volumes on normal varieties. arXiv :1305.4284.
- [BdFF] S. Boucksom, T. de Fernex, C. Favre : The volume of an isolated singularity. Duke Math. J. 161 (2012), no. 8, 1455–1520.
- [Cut90] S.D.Cutkosky : A new characterization of rational surface singularities. Invent. Math. 102 (1990), no. 1, 157–177.
- [DI87] P. Deligne, L. Illusie : Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 247–270.
- [EGA] EGA.
- [Eis] D. Eisenbud. Commutative algebra.
- [Fle77] H. Flenner : Die Sätze von Bertini für lokale Ringe. Math. Ann. 229 (1977), no. 2, 97–111.
- [GH] Griffiths-Harris.
- [Gra62] H. Grauert : Über Modifikationen...
- [Har] R. Hartshorne : Algebraic geometry.

- [Har2] R. Hartshorne : Local cohomology. A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961. Lecture Notes in Mathematics, No. 41 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967.
- [Har3] R. Hartshorne : Ample subvarieties.
- [Hir60] H. Hironaka : On the theory of birational blowing-up. Ph. D. Thesis Harvard University, 1960.
- [Hoc73] M. Hochster : Non-openness of loci in Noetherian rings. Duke Math. J. Volume 40, Number 1 (1973), 215–219.
- [Jou] J.P.Jouanolou : Théorèmes de Bertini et applications. Progress in Mathematics, 42. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.
- [Kaw] Y. Kawamata : Crepant Blowing-Up of 3-Dimensional Canonical Singularities. Ann. Math.
- [KMM87] Y. Kawamata, Matsuda, Matsuki.
- [Kee] D. Keeler : Ample filters of invertible sheaves. J. of Algebra **259**, no. 1, (2003), 243–283.
- [Kle66] S. Kleiman : Towards a numerical...
- [Kol] J. Kollár : Rational curves.
- [KM] J. Kollár, S. Mori : Birational geometry of algebraic varieties. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Laz] R. Lazarsfeld : Positivity in algebraic geometry I, II. A Series of Modern Surveys in Mathematics 48 and 49. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Lip69] J. Lipman : Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 36 (1969).
- [Liu] Q. Liu : Algebraic geometry and arithmetic curves. Translated from the French by Reinie Ern e. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [Mori] S. Mori : Classification of higher-dimensional varieties. Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 269–331, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Roc] Rockafellar : Convex analysis.
- [Stacks] Stacks Project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2014.
- [Sam61] P. Samuel : Sur les anneaux factoriels. Bull. Soc. Math. France 89 1961 155–173.
- [ZS] O. Zariski, P. Samuel : Commutative algebra. Vol. II. Reprint of the 1960 edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.