Variétés, fibrés vectoriels et formes différentielles

Sébastien Boucksom

Septembre 2019

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires topologiques

1.1 Bases et voisinages

Espaces topologiques

On rappelle qu'un *espace topologique* X est un ensemble muni d'une *topologie*, i.e. une collection de parties de X appelées *ouverts*, ayant les propriétés suivantes :

(O1) X et l'ensemble vide sont ouverts ;
(O2) la réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert ;
(O3) l'intersection d'un famille finie d'ouverts est un ouvert.

Le complémentaire d'un ouvert est appelé *fermé*, et on a donc dualement :

(F1) X et l'ensemble vide sont fermés ;
(F2) l'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé ;
(F3) la réunion d'un famille finie de fermés est un fermé.

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est *continue* si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.

Etant donnée une partie $Y \subset X$, la réunion des ouverts de X contenus dans Y est clairement le plus grand ouvert de X (éventuellement vide) contenu dans Y ; on le nomme *intérieur* de Y, noté $\mathring{Y} \subset X$. De même, l'intersection de tous les fermés de X contenant Y est le plus petit fermé contenant Y, appelé *adhérence* de Y est noté $\overline{Y} \subset X$. Le *bord* de Y est défini comme le fermé $\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$.

Topologies induites

Si X est un espace topologique et Y est un ensemble, la donnée d'une application $f : Y \to X$ (resp. $f : Y \to X$) induit naturellement une topologie sur Y en imposant que f devienne continue. Plus précisément, le fait que les images réciproques commutent aux unions et intersections montre de suite que :

(i) la donnée d'une application $f : Y \to X$ définit une topologie sur Y ayant pour ouverts les images réciproques d'ouverts de X ;
(ii) la donnée d'une application $f : X \to Y$ définit une topologie sur Y pour laquelle une partie $U \subset Y$ est ouverte ssi $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

La topologie définie par (i) (resp. (ii)) est la plus grossière (resp. la plus fine) pour laquelle f est continue.

Exemple 1.1.1. Toute partie $Y \subset X$ d'un espace topologique X hérite d'une *topologie induite*, dont les ouverts sont les intersections d'ouverts de X avec Y ; il s'agit de la topologie la plus grossière sur Y rendant continue l'application d'inclusion $\iota : Y \to X$.

Exercice 1.1.2 (Topologie quotient)**.** *Soit X un espace topologique, et $\pi : X \to Y$ une application surjective vers un ensemble Y. On appelle* topologie quotient *la topologie induite sur Y, qui est donc la plus fine telle que π soit continue. Montrer qu'elle satisfait la* propriété universelle *suivante :*

une application continue $f : X \to Z$, constante le long des fibres $\pi^{-1}(y)$ de π, se factorise de façon unique en $f = \bar{f} \circ \pi$ avec $\bar{f} : Y \to Z$ continue.

On munit (en général) le quotient ensembliste d'un espace topologique X par une relation d'équivalence de la topologie quotient.

Exemple 1.1.3. Le quotient X/A d'un espace X par un sous-espace A est le quotient X par la relation d'équivalence $x \sim x'$ ssi $x, x' \in A$. Les ouverts de X/A correspondent donc à des ouverts $V \subset X$ tels que $V \supset A$ ou $V \cap A = \emptyset$.

Bases

Une *base* d'un espace topologique X est une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts de X telle que tout ouvert est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Notons que $\mathcal{B}$ détermine entièrement la topologie de X, les ouverts étant précisément les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.1.4. Les boules ouvertes (de rayon rationnel si on veut) d'un espace métrique forment une base de sa topologie.

Exercice 1.1.5. *Une famille $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble X est la base d'une (unique) topologie sur X ssi toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Cette dernière condition est en particulier réalisée si $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie.

Exercice 1.1.6. *Etant donnée une famille d'espaces topologiques $(X_i)_{i \in I}$, on définit la* topologie produit *sur $Y := \prod_{i \in I} X_i$ comme la topologie la plus* *grossière rendant les projections $p_i : Y \to X_i$ continues. Montrer que les ouverts de la forme*

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \notin J} X_i$$

avec $J \subset I$ fini et $U_j \subset X_j$ ouvert forment une base de la topologie produit.

Dans le cas particulier où $X_i = X$ est indépendant de I, l'espace topologique produit X^I s'identifie à l'ensemble des applications $f : I \to X$, muni de la *topologie de la convergence simple*, ayant pour base les ensembles de la forme $\{f \in X^I \mid f(J) \subset U\}$ avec $J \subset I$ fini et $U \subset X$ ouvert.

Exemple 1.1.7. Si X est un espace topologique, les ensembles de la forme $\mathcal{V}_U := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid B \subset U\}$ avec $U \subset X$ ouvert satisfont $\mathcal{V}_U \cap \mathcal{V}_{U'} = \mathcal{V}_{U \cap U'}$, et forment donc la base d'une topologie sur $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 1.1.8. *Pour une famille quelconque $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble X, la topologie la plus grossière pour laquelle les éléments de $\mathcal{F}$ sont des ouverts a pour base $\mathcal{B}$ les intersections finies d'éléments de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est (au plus) dénombrable, en déduire que X est à base dénombrable.*

Définition 1.1.9. Un espace topologique X est dit *à base dénombrable* (*second countable* en anglais) si sa topologie admet une base $\mathcal{B}$ qui soit dénombrable.

Proposition 1.1.10. *Un espace topologique X à base dénombrable satisfait la* propriété de Lindelöf *: tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement au plus dénombrable.*

En particulier, une partition ouverte de X est au plus dénombrable.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, et $\mathcal{B}$ une base dénombrable de la topologie. Les $V \in \mathcal{B}$ contenus dans l'un des U_i forment un ensemble dénombrable $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, et on peut choisir une application $f : \mathcal{B}' \to I$ telle que $V \subset U_{f(V)}$ pour tout $V \in \mathcal{B}'$. Il est alors immédiat de voir que $(U_i)_{i \in f(\mathcal{B}')}$ est un sous-recouvrement au plus dénombrable de (U_i). □

Exercice 1.1.11. *La propriété d'être à base dénombrable est héritée par tout sous-espace.*

Exercice 1.1.12. *Si un espace X admet un recouvrement dénombrable $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par des ouverts U_n à base dénombrable, alors X est à base dénombrable.*

Exercice 1.1.13. *Un espace X à base dénombrable est* séparable *(i.e. contient une suite dense), et ne peut contenir de sous-ensemble discret non-dénombrable.*

Exercice 1.1.14. *Si (X, d) est un espace métrique contenant une suite dense (x_n), montrer que la famille de boules ouvertes $(B(x_n, 1/m))_{n,m \geq 1}$ forme une base dénombrable de X.*

Pour un espace métrique, «base dénombrable» et «séparable» sont donc synonymes (cf. espaces de Hilbert séparables) ; ce n'est pas nécessairement le cas des espaces topologiques plus généraux (cf. exercice 1.1.23 ci-dessous).

Exercice 1.1.15. *Tout espace métrique compact est à base dénombrable.*

Voisinages

Un *voisinage* d'une partie Y d'un espace topologique X est un sous-ensemble $V \subset X$ qui contient Y dans son intérieur ; de façon équivalente, il existe $U \subset X$ ouvert tel que $Y \subset U \subset V$. Une *base de voisinages* de Y est un ensemble $\mathcal{V}$ de parties $V \subset X$ tel que tout voisinage de Y contienne un élément de $\mathcal{V}$. Notons que toute base de voisinage $\mathcal{V}$ satisfait la propriété suivante :

(V) l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$ contient un élément de $\mathcal{V}$.

Exemple 1.1.16. Si X est un espace métrique, les boules ouvertes (resp. fermées) centrées en un point $x \in X$ forment une base de voisinages de x.

Exercice 1.1.17. *Si $\mathcal{V}$ est une base de voisinages d'un point $x \in X$, alors x est adhérent à une partie $Y \subset X$ ssi chaque $V \in \mathcal{V}$ intersecte Y.*

Exercice 1.1.18. *Si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de X, les éléments de $\mathcal{B}$ contenant un point $x \in X$ donné forment une base de voisinages de x.*

Exercice 1.1.19. *Soit X un ensemble, et supposons donné pour chaque $x \in X$ un ensemble $\mathcal{V}_x$ de parties $V \subset X$ contenant x, et ayant la propriété (V) ci-dessus. Il existe alors une unique topologie sur X telle que $\mathcal{V}_x$ soit, pour tout $x \in X$, une base de voisinage de x.*

On dit que X est à *bases dénombrables de voisinages* (*first countable* en anglais) si tout point de X admet une base dénombrable de voisinages.

Exemple 1.1.20. Tout espace métrique est à bases dénombrables de voisinages.

Exercice 1.1.21. *Si X est à bases dénombrables de voisinages, un point $x \in X$ est adhérent à une partie $Y \subset X$ ssi x est la limite d'une suite (y_n) de Y.*

Exercice 1.1.22. *Soit X un espace topologique séparé contenant au moins deux points et I un ensemble non-dénombrable. Montrer que les applications constantes n'admettent pas de base de voisinage dénombrable dans X^I.*

Au vu l'exercice 1.1.14, on pourrait être tenté de croire que tout espace topologique X à bases de voisinages dénombrables et admettant une suite dense est à base dénombrable. L'exercice suivant montre que c'est faux en général :

Exercice 1.1.23. *On appelle* droite de Sorgenfrey *l'espace topologique* $\mathbb{R}_{\mathrm{Sor}}$ *obtenu en munissant l'ensemble* $\mathbb{R}$ *de la topologie pour laquelle les intervalles demi-ouverts* $[x, x+\varepsilon)$ *forment une base de voisinage de* x *(cf. exercice 1.1.19). Montrer que* $\mathbb{R}_{\mathrm{Sor}}$ *est à bases dénombrables de voisinages, séparable, mais que sa topologie n'est pas à base dénombrable. En particulier,* $\mathbb{R}_{\mathrm{Sor}}$ *n'est pas métrisable.*

1.2 Connexité et séparation

Connexité

Un espace topologique X est *connexe* s'il ne peut être écrit comme union disjointe de deux ouverts non-vides. De façon équivalente, X est connexe ssi X est la seule partie non-vide qui soit à la fois ouverte et fermée. On dit à l'opposé que X est *totalement discontinu* si les seules parties connexes non-vides de X sont les singletons.

Exercice 1.2.1. *Si* $f : X \to Y$ *est une application continue entre espaces topologiques, alors* X *connexe* $\implies f(X)$ *connexe.*

Exercice 1.2.2. *Montrer qu'on définit une relation d'équivalence sur un espace topologique* X *en posant* $x \sim y$ *ssi* x *et* y *appartiennent à une même partie connexe de* X*.*

Les classes d'équivalence sont les parties connexes maximales de X, appelées *composantes connexes* de X. L'ensemble des composantes connexes est noté $\pi_0(X)$.

Exercice 1.2.3. *Muni de la topologie quotient, l'ensemble* $\pi_0(X)$ *des compsantes connexes d'un espace topologique est totalement discontinu, et discret ssi les composantes connexes de* X *sont ouvertes.*

Exercice 1.2.4. *L'adhérence d'une partie connexe* Y *d'un espace topologique* X *reste connexe. Les composantes connexes de* X *sont donc fermées.*

Un espace X est *localement connexe* si tout point admet une base de voisinages connexes.

Exercice 1.2.5. *Les composantes connexes d'un espace localement connexe* X *sont ouvertes et fermées.*

Exercice 1.2.6. *Pour un espace* X *localement connexe, sont équivalentes :*

(i) *X est à base dénombrable ;*

(ii) *chaque composante connexe de X est à base dénombrable, et $\pi_0(X)$ est au plus dénombrable.*

Ceci est faux si l'on omet l'hypothèse de locale connexité.

Exemple 1.2.7. L'ensemble de Cantor $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est un espace compact à base dénombrable, totalement discontinu et non-dénombrable.

Exercice 1.2.8. *Soit X un espace connexe, et (U_i) un recouvrement ouvert. Etant donné $x_0 \in X$ et U_{i_0} contenant x_0, montrer que tout $x \in X$ appartient au dernier ouvert U_{i_n} d'une chaîne d'ouverts $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$, i.e. une suite finie telle que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $0 \leq k < n$.*

Séparation et recollement

Un espace topologique X est *séparé* (*Hausdorff* en anglais) si deux points distincts de X admettent des voisinages disjoints.

Exercice 1.2.9. *Montrer que X est séparé ssi la diagonale*

$$\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$$

est fermée dans X.

Exercice 1.2.10. *Les deux propriétés suivantes d'un espace topologique X sont équivalentes :*

(*i*) *étant donnés $A \subset X$ fermé et $x \in X \setminus A$, il existe des ouverts disjoints $U, V \subset X$ avec $x \in U$ et $A \subset V$;*

(*ii*) *tout point de X admet une base de voisinages fermés.*

On dit d'un tel espace qu'il est *régulier*.

Définition 1.2.11. On appelle *donnée de recollement* la donnée suivante :

(i) une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'espaces topologiques ;

(ii) des ouverts $X_{ij} \subset X_i$, $i, j \in I$;

(iii) des homéomorphismes $\phi_{ij} : X_{ij} \simeq X_{ji}$, tels que $\phi_{ii} = \mathrm{id}$ et satisfaisant la relation de cocycle

$$\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik} \text{ sur } X_{ki} \cap X_{kj}.$$

On définit alors le *recollement des X_i le long de leurs ouverts communs X_{ij}* comme le quotient X de l'union disjointe des X_i par $x \in X_{ij} \sim \phi_{ij}(x) \in X_{ji}$ (qui est une relation d'équivalence grâce à la relation de cocycle).

Exercice 1.2.12. *Pour chaque i, la restriction du quotient $\phi_i : X_i \to X$ est un homéomorphisme sur un ouvert U_i de X, qui envoie X_{ij} sur $U_i \cap U_j$, et $\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i$.*

Cette procédure produit souvent des espaces non-séparés.

Exercice 1.2.13. *Montrer que le recollement X est séparé ssi les X_i sont séparés et l'image de chaque X_{ij} dans $X_i \times X_j$ est fermée.*

Exemple 1.2.14. La *droite à deux origines* $\tilde{\mathbb{R}}$ est obtenue en recollant de deux copies de $\mathbb{R}$ identifiées le long de $\mathbb{R}^\times$. Elle possède deux points $0, 0' \in \tilde{\mathbb{R}}$ non-séparés, et $\tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0, 0'\} \simeq \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 1.2.15. *Montrer que la topologie définie dans l'exercice* **??** *sur l'ensemble* $\mathcal{P}(X)$ *des parties d'un espace topologique* X *n'est séparée que si* X *est réduit à un point.*

1.3 Applications ouvertes et fermées

Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite *ouverte* (resp. *fermée*) si l'image de tout ouvert (resp. fermé) est ouvert (resp. fermé).

Exercice 1.3.1. *Soit* $f : X \to Y$ *une application entre espaces topologiques.*

(*i*) f *est ouverte ssi pour tout* $x \in X$ *et tout voisinage* V *de* x, $f(V)$ *est un voisinage de* $f(x)$.

(*ii*) f *est fermée ssi pour tout* $y \in Y$, *les* ≪*tubes*≫ $f^{-1}(V)$ *avec* V *voisinage de* y *forment une base de voisinages de la fibre* $f^{-1}(y)$.

On voit ainsi que l'ouverture est une propriété de ≪surjectivité locale après perturbation≫ : si x_0 et y_0 satisfont $f(x_0) = y_0$, alors tout y proche de y_0 admet une solution de $f(x) = y$ avec x proche de x_0.

La fermeture peut, quant à elle, être vue comme une condition de continuité des fibres, comme suit.

Exercice 1.3.2. *Une application continue* $f : X \to Y$ *est fermée ssi l'application* $Y \to \mathcal{P}(X)$ *définie par* $y \mapsto f^{-1}(y)$ *est continue pour la topologie de* $\mathcal{P}(X)$ *définie dans l'exemple 1.1.7.*

Exercice 1.3.3. *Montrer que toute projection* $X \times Y \to X$ *est ouverte, et donner un exemple simple où elle n'est pas fermée.*

Exercice 1.3.4. *Soit* $f : X \to Y$ *une application continue.*

(*i*) f *est un homéomorphisme sur un fermé* (*resp. un ouvert*) *de* Y *ssi* f *est injective et fermée* (*resp. ouverte*).

(*ii*) f *est homéomorphisme local ssi elle est ouverte et localement injective.*

Exercice 1.3.5. *Si une application continue surjective* $\pi : X \to Y$ *est ouverte ou fermée, alors la topologie de* Y *coïncide avec la topologie quotient (cf. exercice 1.1.2).*

Exercice 1.3.6. *On pose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et on considère une application linéaire surjective* $\alpha : V \to W$ *entre* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels topologiques.*

(*i*) *Montrer que* α *ouverte implique* α *surjective, et établir la réciproque lorsque* V, W *sont de dimension finie.*

(*ii*) *Montrer que* α *est fermée ssi c'est un isomorphisme sur un sous-espace fermé de* W. *On pourra considérer une «hyperbole»* $xv + x^{-1}v'$, $x \in K^\times$ *avec* $v, v' \in V$ *bien choisis.*

Le théorème de l'application ouverte donne plus généralement la direction réciproque dans (i) si V, W sont des espaces de Banach (ou même de Fréchet).

1.4 Espaces localement compacts

Espaces compacts

Un espace topologique X est *quasi-compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Exercice 1.4.1. *Si* X *est quasi-compact, tout fermé de* X *et toute image de* X *par une application continue est quasi-compact.*

Exercice 1.4.2. *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *des espaces topologiques, et* $K_i \subset X_i$ *des parties quasi-compactes,* $i = 1, \ldots, n$. *Montrer que les produits* $\prod_i V_i$ *avec* $V_i \subset X_i$ *voisinage de* K_i *forment une base de voisinages de* $\prod_i K_i$ *dans* $\prod_i X_i$.

Exercice 1.4.3. *Si* X *est quasi-compact à bases dénombrables de voisinages, alors toute suite de* X *admet une sous-suite convergente.*

La réciproque est vraie dans un espace métrique (théorème de Bolzano-Weierstrass).

Exercice 1.4.4. *Si* X *est un espace séparé, tout partie (quasi-)compacte* $Y \subset X$ *est fermée.*

Ceci est en général faux pour un espace non-séparé, puisqu'un point de X, bien que compact, n'est alors pas nécessairement fermé (et peut même être dense !). Pour cette raison, on définit un espace topologique *compact* comme un espace topologique quasi-compact et séparé [1].

Exercice 1.4.5. *Si une famille de compacts* (K_i) *d'un espace topologique* X *a une intersection vide, alors c'est déjà le cas pour une sous-famille finie.*

Exercice 1.4.6. *Montrer que deux compacts disjoints* $K, K' \subset X$ *d'un espace séparé* X *admettent des voisinages disjoints.*

Exercice 1.4.7. *Déduire de l'exercice 1.4.6 que tout espace compact* X *est régulier (cf. exercice 1.2.10).*

1. Il s'agit de la convention bourbakiste ; la terminologie anglo-saxone est différente, «compact» en anglais signifiant en général seulement «quasi-compact» dans la présente terminologie.

Rappelons enfin le résultat fondamental suivant, même si nous n'en auront pas directement l'usage.

Théorème 1.4.8 (Théorème de Tykhonov)**.** *Un produit arbitraire d'espaces (quasi-)compacts est (quasi-)compact.*

Pour une famille dénombrable d'espaces métriques compacts, la preuve procède par extraction diagonale. Dans le cas général, le même argument fonctionne encore en remplaçant les suites par des filtres (voir par exemple [Bou]).

Espaces localement compacts

Un espace topologique X est *localement compact* s'il est séparé [2] et si tout point admet une base de voisinages compacts (cette formulation illustrant au passage l'intérêt d'autoriser les voisinages à ne pas être ouverts).

Exercice 1.4.9. *En utilisant l'exercice 1.4.7, vérifier que tout espace compact est localement compact.*

De façon équivalente, un espace séparé est localement compact dès que chaque point admet *un* voisinage compact.

On dit qu'un espace topologique séparé X est un *k-espace* si sa topologie est définie par les compacts, i.e. une partie $Y \subset X$ est fermée ssi $Y \cap K$ est compact pour tout compact $K \subset X$.

Exercice 1.4.10. *Montrer que les espaces localement compacts sont des k-espaces.*

Exercice 1.4.11. *Si (x_n) est une suite convergente d'un espace topologique X, de limite x, montrer que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est quasi-compact. En déduire que tout espace séparé à bases dénombrables de voisinages (e.g. tout espace métrique) est un k-espace.*

Exercice 1.4.12. *Soit $f : X \to Y$ une surjection continue et ouverte entre espaces localement compacts. Montrer que tout compact de Y est de la forme $f(K)$ avec $K \subset X$ compact.*

Exercice 1.4.13. *Un espace vectoriel normé est localement compact ssi il est de dimension finie.*

2. Même remarque.

Parties localement fermées

Une partie $Y \subset X$ d'un espace topologique est *localement fermée* si tout $y \in Y$ admet un voisinage V dans X tel que $V \cap Y$ est fermé dans V.

Exercice 1.4.14. *Une partie Y d'un espace topologique X est localement fermée ssi elle est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de X.*

Exercice 1.4.15. *Soit Y une partie d'un espace topologique séparé X.*
- (i) *Si Y est localement compacte, Y est localement fermée dans X.*
- (ii) *Réciproquement, si X est localement compact et Y est localement fermée, Y est localement compacte.*

En particulier, chaque composante connexe d'un espace localement compact X, étant fermée, est elle-même localement compacte.

Compactifié d'Aleksandrov

Dans ce qui suit, X est un espace localement compact. Le *compactifié d'Aleksandrov* de X (aussi appelé *one-point compactification* en anglais) est l'ensemble $\bar{X} := X \cup \{\infty\}$ (où ∞ désigne un point n'appartenant pas à X), muni de la topologie pour laquelle X est un ouvert et les ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ avec $K \subset X$ compact forment une base de voisinages de ∞.

Exercice 1.4.16. *Décrire les ouverts de $\bar{X}$. En utilisant l'exercice 1.4.5, montrer que $\bar{X}$ est compact.*

Exercice 1.4.17. *Montrer que X est un ouvert dense de $\bar{X}$, sauf si X est déjà compact, auquel cas ∞ est un point isolé de $\bar{X}$.*

Exercice 1.4.18. *Si $x \in K$ est un point d'un espace compact, alors K est homéomorphe au compactifié d'Aleksandrov de $K \setminus \{x\}$.*

Exemple 1.4.19. La sphère S^n est le compactifié d'Aleksandrov de $\mathbb{R}^n$ (cf. exercice 2.4.1).

Espaces dénombrables à l'infini

Un espace localement compact X est *dénombrable à l'infini* (ou *σ-compact*) si X s'écrit comme réunion dénombrable de compacts.

Exemple 1.4.20. Un espace discret X est dénombrable à l'infini ssi X est dénombrable.

Exercice 1.4.21. *Si X est localement compact et dénombrable à l'infini, alors X satisfait la propriété de Lindelöf : tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement au plus dénombrable.*

Exercice 1.4.22. *Un espace localement compact X est dénombrable à l'infini ssi il admet une* suite exhaustive de compacts*, i.e. une suite croissante de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $X = \bigcup_n K_n$.*

Exercice 1.4.23. *Montrer que X est dénombrable à l'infini ssi le point à l'infini de son compactifié d'Aleksandrov $\bar{X}$ admet une base dénombrable de voisinages.*

Exemple 1.4.24. Soit K un espace compact non-réduit à un point. Le théorème de Tykhonov garantit que l'espace $M = K^{\mathbb{R}}$ des applications $\mathbb{R} \to K$ muni de la topologie de la convergence simple est compact, et l'exercice 1.1.22 montre qu'une application constante $f \in M$ ne peut admettre de base dénombrable de voisinages dans M. Puisque M est homéomorphe au compactifié d'Aleksandrov de $X := M \setminus \{f\}$ (cf. exercice 1.4.16), on en déduit que X est localement compact mais pas dénombrable à l'infini.

Exercice 1.4.25. *Un espace X localement compact est à base dénombrable ssi X est dénombrable à l'infini et localement à base dénombrable.*

Ensembles limites

L'*ensemble limite* d'une application continue $f : X \to Y$ entre espace localement compacts est défini comme le fermé

$$L(f) := \bigcap_{K \subset X} \overline{f(X \setminus K)} \subset Y.$$

Exercice 1.4.26. *Si X est dénombrable à l'infini et Y est à bases dénombrables de voisinages, $L(f)$ consiste en l'ensemble des $y = \lim f(x_n)$ où (x_n) est une suite de X tendant vers l'infini.*

Théorème 1.4.27. *Une application continue injective $f : X \to Y$ entre espaces localement compacts est un homéomorphisme sur son image ssi son ensemble limite $L(f)$ n'intersecte pas $f(X)$, qui est alors localement fermé dans Y.*

Démonstration. Si f est un homéomorphisme sur son image, alors $f(X)$ est localement compact, et donc localement fermé dans Y. De plus, tout $x \in X$ admet un voisinage compact $K \subset X$; $f(K)$ est alors un voisinage de $y = f(x)$ dans $f(X)$, donc $f(K) = V \cap f(X)$ avec V voisinage de y dans X, et l'injectivité de f montre que V ne rencontre pas $f(X \setminus K)$. Le point y n'est donc pas adhérent à $f(X \setminus K)$, et on concut $f(X) \cap L(f) = \emptyset$.

Supposons réciproquement cette dernière condition satisfaite. Etant donné un fermé $F \subset X$, il s'agit de montrer que $f(F)$ est fermé dans $f(X)$, ce qui revient à $f(F) = \overline{f(F)} \cap f(X)$, où l'adhérence est prise dans Y. Puisque $L(f)$ ne rencontre pas $f(X)$, il suffit donc de montrer que tout point $y \in \overline{f(F)} \setminus L(f)$

appartient à $f(F)$. Par hypothèse, il existe $K \subset X$ compact et un voisinage $V \subset Y$ de y ne rencontrant pas $f(X \setminus K)$. Puisque y est adhérent à $f(F)$, tout voisinage $W \subset V$ de y contient un point de la forme $f(x)$ avec $x \in F$, et donc aussi $x \in K$, par injectivité de f. Il en résulte que y est adhérent à $f(F \cap K)$, et donc $y \in f(F \cap K) \subset f(F)$, par compacité de K. □

Corollaire 1.4.28. *Soit $f : X \to Y$ une application continue injective entre espaces localement compacts, avec X dénombrable à l'infini. Alors f est un homéomorphisme sur son image ssi il n'existe pas de suite (x_n) de X tendant vers l'infini et $x \in X$ tels que $f(x_n) \to f(x)$.*

Applications propres

On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ entre espaces localement compacts est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. C'est automatiquement le cas lorsque X est compact.

Théorème 1.4.29. *Pour une application continue $f : X \to Y$ entre espaces localement compacts, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est propre ;
(ii) l'ensemble limite $L(f)$ est vide ;
(iii) f s'étend en une application continue entre les compactifiés d'Aleksandrov $\bar{X} \to \bar{Y}$ (i.e. ≪f tend vers l'infini à l'infini≫) ;
(iv) f est fermée et à fibres compactes.

Démonstration. L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) est aisée, et laissée en exercice. Pour établir (i)$\Longleftrightarrow$(iv), supposons d'abord f propre. Chaque fibre est alors compacte, en tant qu'image réciproque d'un compact. D'après l'exercice 1.4.10, pour voir que f est fermée, il suffit de vérifier que $f(F) \cap K$ est compact pour tout fermé $F \subset X$ et tout compact $K \subset Y$, ce qui résulte de la ≪formule de projection≫ $f(F) \cap K = f(F \cap f^{-1}(K))$. Supppsons réciproquement f fermée à fibres compactes. Soit $K \subset Y$ un compact, et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X recouvrant $f^{-1}(K)$. Pour chaque $y \in K$, on peut trouver $I_y \subset I$ fini tel que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in I_y} U_i$, par compacité. Puisque f est fermée, y admet de plus un voisinage ouvert $V_y \subset Y$ tel que $f^{-1}(V_y) \subset \bigcup_{i \in I_y} U_i$, d'après l'exercice 1.3.1. Par compacité de K, il existe $A \subset K$ fini tel que $K \subset \bigcup_{y \in A} V_y$, ce qui donne $f^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ avec $J := \bigcup_{y \in A} I_y \subset I$ fini. Ceci établi la compacité de $f^{-1}(K)$, et achève la preuve de (i)$\Longleftrightarrow$(iv). □

Corollaire 1.4.30. *Si X est dénombrable à l'infini, $f : X \to Y$ est propre ssi $f(x_n) \to \infty$ pour toute suite (x_n) de X tendant vers l'infini.*

Remarque 1.4.31. Une application continue à fibres compactes n'est pas nécessairement propre : si $f : X \to Y$ est propre, sa restriction $X \setminus f^{-1}(y) \to Y$ avec $y \in f(X)$ est à fibres compactes mais n'est pas propre ; elle l'est par contre vue comme application $X \setminus f^{-1}(y) \to Y \setminus \{y\}$.

De même, une application fermée n'est pas nécessairement propre : si X et Y sont des espaces discrets, toute application $f : X \to Y$ est fermée, mais f est propre ssi ses fibres sont finies.

Exercice 1.4.32. *Montrer que tout polynôme complexe non constant définit une application propre $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, et qu'une fonction polynomiale $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est propre si sa partie homogène de degré maximal ne s'annule qu'en* 0.

1.5 Actions de groupe et quotients

Action sur un ensemble

Soit G un groupe, d'élément neutre e. Une *action* de G sur un ensemble X est la donnée d'un morphisme de groupes de G dans les permutations de X. De façon équivalente, une action est la donnée d'une application $G \times X \to X$ $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que $e \cdot x = x$ et $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ pour tous $x \in X$ et $g, h \in G$.

L'*orbite* d'un point $x \in X$ est le sous-ensemble

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\},$$

et le *stabilisateur* de x est le sous-groupe

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

L'application d'orbite $G \to X$ $g \mapsto g \cdot x$ induit une bijection

$$G/G_x \simeq G \cdot x.$$

On dit que l'action est *libre* si $G_x = \{e\}$ pour tout x, i.e. si aucun élément de g n'a de point fixe dans X, et on dit qu'elle est transitive si X est une orbite de G. La relation $x \sim g \cdot x$ est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont précisément les orbites de G dans X ; on note

$$\pi : X \to X/G$$

le quotient associé.

Exemple 1.5.1. Une action de $\mathbb{Z}$ sur X équivaut à la donnée d'un bijection de X, et une action du groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{\pm 1\}$ revient à se donner une *involution*, i.e. une bijection de X égale à son inverse.

Exemple 1.5.2. Une *représentation linéaire* de G sur un espace vectoriel V est une action par transformations linéaires, i.e. un morphisme $G \to \mathrm{GL}(V)$.

Action sur un espace topologique

On suppose que X est un espace topologique, sur lequel un groupe G agit par homéomorphismes, i.e. $x \mapsto g \cdot x$ est continue pour tout $g \in G$. On munit X/G de la topologie quotient, pour laquelle une partie $U \subset X/G$ est ouverte ssi $\pi^{-1}(U)$ est ouvert (exercice 1.1.2).

Exercice 1.5.3. *L'application quotient $\pi : X \to X/G$ est ouverte.*

L'espace des orbites X/G n'est en général pas séparé ; cette dernière condition implique en effet que les orbites de G dans X sont fermées, et les exemples où tel n'est pas le cas abondent, même pour X et G très raisonnables (en donner un !).

Exercice 1.5.4. *Le quotient X/G est séparé ssi deux points $x, y \in X$ tels que $y \notin G \cdot x$ admettent des voisinages U, V tels que $G \cdot U \cap V = \emptyset$.*

Action d'un groupe topologique

Un *groupe topologique* G est un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et l'inversion sont continues. Notons que tout groupe G est un groupe topologique pour la topologie discrète.

Exercice 1.5.5. *On appelle* composante neutre G^0 *d'un groupe topologique G la composante connexe de e. Montrer qu'elle satisfait les propriétés suivantes :*

(*i*) *G^0 est un sous-groupe fermé distingué ;*

(*ii*) *l'application naturelle $G \to \pi_0(G)$ induit un homéomorphisme $G/G^0 \simeq \pi_0(G)$.*

On suppose maintenant que le groupe topologique G agit sur un espace topologique X, auquel cas on suppose implicitement que l'application d'action $G \times X \to X$ est continue. Pour un groupe muni de la topologie discrète, ceci revient à demander comme ci-dessus la continuité de $x \mapsto g \cdot x$ pour chaque $g \in G$.

On définit le *graphe* de l'action comme l'application

$$\rho : G \times X \to X \times X$$

définie par $\rho(g, x) = (g \cdot x, x)$.

Exercice 1.5.6. *Vérifier que la condition de l'exercice 1.5.4 revient à dire que $\rho(G \times X)$ est fermé.*

On dit que l'action de G sur X est *fermée* si ρ est application fermée.

Proposition 1.5.7. *Une action fermée d'un groupe topologique G sur un espace X vérifie les propriétés suivantes :*

(*i*) *le quotient X/G est séparé ;*

(*ii*) *pour tout $x \in X$ et tout voisinage $V \subset G$ du stabilisateur G_x, il existe un voisinage $U \subset X$ de x tel que tout $g \in G$ avec $(g \cdot U) \cap U \neq \emptyset$ soit dans V ;*

(*iii*) *pour tout point fermé $x \in X$, l'orbite $G \cdot x$ est fermée, et l'application d'orbite induit un homéomorphisme $G/G_x \simeq G \cdot x$.*

Démonstration. (i) est une conséquence directe de l'exercice 1.5.6. Pour (ii), on observe que $\rho^{-1}(x,x) = G_x \times \{x\}$. Puisque $V \times X$ est un voisinage de $\rho^{-1}(x,x)$, l'exercice 1.3.1 donne l'existence d'un voisinage $U \subset X$ de x tel que $\rho^{-1}(U \times U) \subset V \times X$, ce qui équivaut à $(g \cdot U) \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow g \in V$. Si x est fermé dans X, $G \times \{x\}$ est fermé dans $G \times X$. La restriction de ρ à $G \times \{x\}$ induit donc une application fermée $G \simeq G \times \{x\} \to X \times \{x\} \simeq X$, qui coïncide avec l'application d'orbite. On en déduit que son image $G \cdot x$ est fermée, et que $G/G_x \to G \cdot x$ est bijective, continue et fermée, donc un homéomorphisme. $\square$

Corollaire 1.5.8. *Soit G un groupe discret agissant librement sur X. Si l'action est fermée, alors $\pi : X \to X/G$ est un homéomorphisme local.*

Démonstration. Pout tout $x \in X$, $G_x = \{e\}$ est ouvert dans G, et la proposition 1.5.7 fournit donc un voisinage ouvert $U \subset X$ tel que $g \cdot U \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow g = e$. Ceci implique que $\pi|_U$ est injective, et donc un homéomorphisme de U sur un ouvert de X/G, puisque π est ouverte. $\square$

Exercice 1.5.9. *On supose que l'espace X admet une action fermée d'un groupe topologique G. Montrer que l'action sur X de tout sous-groupe fermé H est elle aussi fermée, et en déduire que G séparé implique X séparé.*

Exercice 1.5.10. *Montrer que le graphe de l'action d'un groupe topologique G sur lui-même par translation à gauche est un homéomorphisme. En utilisant l'exercice précédent, en déduire qu'un sous-groupe H de G est fermé ssi G/H est séparé. En particulier, G est séparé ssi $\{e\}$ est fermé.*

Exercice 1.5.11. *On dit qu'une action d'un groupe localement compact G sur un espace X est* propre au sens de Palais *si pour tous $x, x' \in X$ on peut trouver des voisinages V, V' de x, x' tels que $\{g \in G \mid gV \cap V' \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G. Montrer que cette propriété équivaut au fait que l'action est fermée et à stabilisateurs G_x compacts.*

Le cas localement compact

On suppose désormais que G est un groupe localement compact agissant continûment sur un espace topologique X, également supposé localement compact. L'application d'orbite d'un point $x \in X$ induit une bijection continue $G/G_x \simeq G \cdot x$, qui n'est en général pas un homéomorphisme. Ceci ne peut en effet avoir lieu que si $G \cdot x$ est localement compacte, et donc localement fermée dans X (exercice 1.4.15). Réciproquement, on a le

Théorème 1.5.12. *Si G est dénombrable à l'infini, alors l'application d'orbite d'un point donné $x \in X$ induit un homéomorphisme $G/G_x \simeq G \cdot x$ ssi $G \cdot x$ est localement fermée dans X. En particulier, $G/G_x \simeq X$ si l'action est transitive.*

L'hypothèse sur G est en particulier satisfaite dès que $\pi_0(G)$ est au plus dénombrable, cf. exercice 1.6.5. En revanche, l'action par translation de $G = \mathbb{R}$ vu comme groupe discret sur la droite $X = \mathbb{R}$ montre qu'on ne peut se passer de l'hypothèse de dénombrabilité.

Lemme 1.5.13. *Tout espace localement compact X satisfait le lemme de Baire, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts denses de X est dense.*

Démonstration. On peut essentiellement suivre l'argument habituel dans le cas métrique complet. Soit (U_n) une suite d'ouverts denses de X, et $V \subset X$ un ouvert. On peut trouver $x_1 \in V \cap U_1$, qui admet un voisinage $V_1 \Subset V \cap U_1$, puis $x_2 \in V_1 \cap U_2$ avec un voisinage $V_2 \Subset V_1 \cap U_2$, etc.. On produit ainsi une suite décroissante de compacts non-vides $\bar{V}_n$ contenus dans $V \cap U_n$, dont l'intersection fournit un point dans $V \cap \bigcap_n U_n$. □

Preuve du théorème 1.5.12. On a déjà observé que $G/G_x \simeq G \cdot x$ implique que cette dernière est localement fermée. Pour la réciproque, on peut remplacer X par $G \cdot x$ et supposer que l'action est transitive. Etant donné un voisinage $V \subset G$ de e, il s'agit de montrer que $V \cdot x$ est un voisinage de x dans X. Par continuité de la multiplication dans G, on peut trouver un voisinage compact $K \subset G$ de e tel que $K^{-1}K \subset V$. D'après l'exercice 1.4.21, G satisfait la propriété de Lindelöf ; le recouvrement ouvert $(g\mathring{K})_{g \in G}$ admet donc un sous-recouvrement dénombrable, et on peut ainsi trouver une suite (g_n) de G telle que $G = \bigcup_n g_n K$.

On a alors $X = \bigcup g_n K \cdot x$, et le lemme de Baire implique que $g_n K \cdot x$ est d'intérieur non-vide pour un certain n. Par conséquent, $K \cdot x$ est aussi d'intérieur vide, i.e. un voisinage de $g \cdot x$ pour un $g \in K$, et $g^{-1}K \cdot x \subset K^{-1}K \cdot x \subset V \cdot x$ est donc un voisinage de x. □

On dit que l'action de G sur X est *propre* si le graphe $\rho : G \times X \to X \times X$ est une application propre.

Exercice 1.5.14. *Pour toute partie $A \subset X$, on pose*

$$G_A := \{g \in G \mid g \cdot A \cap A \neq \emptyset\}.$$

(i) Pour tout compact $K \subset X$, montrer que G_K est fermé dans G.
(ii) Montrer que l'action de G sur X est propre ssi G_K est compact pour tout $K \subset X$ compact. En particulier, le stabilisateur de tout point est alors compact.
(iii) On suppose de plus X dénombrable à l'infini, et on se donne une suite exhaustive de compacts (K_n) (cf. exercice 1.4.22). Montrer qu'il suffit alors de vérifier (ii) pour les K_n.

Théorème 1.5.15. *Toute action propre d'un groupe localement compact G sur un espace localement compact X vérifie les propriétés suivantes :*

(i) l'espace des orbites X/G est localement compact, et il est compact ssi il existe $K \subset X$ compact tel que $G \cdot K = X$;

(ii) pour tout $x \in X$, le stabilisateur G_x est compact, l'orbite $G \cdot x$ est fermée, et l'application d'orbite induit un homéomorphisme $G/G_x \simeq G \cdot x$.

Démonstration. D'après le théorème 1.4.29, une action propre est en particulier fermée, et la proposition 1.5.7 montre donc que X/G est séparé, ainsi que (ii). Puisque $\pi : X \to X/G$ est ouverte, elle envoie de plus un voisinage compact K d'un point donné $x \in X$ sur un voisinage compact de $\pi(x) \in X/G$, ce qui montre que X/G est localement compact.

Si $K \subset X$ compact satisfait $G \cdot K = X$, alors $\pi(K) = X/G$ est compact. La réciproque résulte de l'exercice 1.4.12. □

On dit qu'un groupe G (sans topologie) agit *proprement discontinûment* sur X si l'action de G est propre en tant que groupe discret. D'après l'exercice 1.5.14, ceci revient à dire que G_K est fini pour tout compact $K \subset X$.

Corollaire 1.5.16. *Soit G un groupe agissant proprement discontinûment et librement sur un espace localement compact X. Alors X/G est localement compact, et l'application quotient $\pi : X \to X/G$ est un homéomorphisme local.*

Démonstration. Le premier point découle du théorème 1.5.15, et le second du corollaire 1.5.8. □

Exercice 1.5.17. *En utilisant le théorème 1.4.29, vérifier que l'action de G sur X est propre ssi elle est fermée et à stabilisateurs compacts. En particulier, «propre» et «fermée» sont synonymes pour une action libre.*

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 (Ruban de Möbius). *Montrer que la transformation affine A de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$A(t, x) = (t + 1, -x)$$

engendre une action proprement discontinue et libre de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$. Le quotient M s'appelle ruban de Möbius. *Est-il compact ?*

Exercice 1.6.2 (Ruban de Möbius à bord). *Montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ induite par A sur $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ est elle aussi proprement discontinue et sans point fixe, et se convaincre que le quotient correspond à la construction bien connue qu'on obtient avec un ruban de papier. Est-il compact ?*

Exercice 1.6.3 (Bouteille de Klein). *Montrer que A induit une action proprement discontinue et sans point fixe de $\mathbb{Z}$ sur le cylindre $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R} \times S^1$, et que le quotient K, appelé* bouteille de Klein*, est compact.*

Les 3 constructions précédentes se généralisent comme suit :

Exercice 1.6.4 (Tore de suspension). *Soit $\phi : F \to F$ un homéomorphisme d'un espace topologique séparé F.*

(*i*) *Montrer que l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R} \times F$ engendrée par l'homéomorphisme $(t, x) \mapsto (t + 1, \phi(x))$ est libre et fermée.*
L'espace quotient M_ϕ est appelé tore de suspension (mapping torus *en anglais) de ϕ.*

(*ii*) *Montrer que la projection $\mathbb{R} \times F \to \mathbb{R}$ induit une surjection continue $\pi : M_\phi \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$, dont les fibres sont toutes homéomorphes à F.*

Exercice 1.6.5. *Montrer qu'un groupe localement compact G avec $\pi_0(G)$ au plus dénombrable est nécessairement dénombrable à l'infini.*

Le groupe compact, totalement discontinu $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques montre que la réciproque est fausse.

Exercice 1.6.6 (Applications propres, cas général). *Pour des espaces topologiques arbitraires X, Y, on dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est* propre *si elle est fermée et à fibres quasi-compactes.*

(*i*) *Si une application continue $f : X \to Y$ est propre, montrer que $f^{-1}(K)$ est quasi-compact pour tout quasi-compact $K \subset Y$.*

(*ii*) *Montrer la réciproque de (i) si Y est un k-espace.*

(*iii*) *Montrer que la projection naturelle $\pi : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ de la droite à deux origines (exemple 1.2.14) est propre.*

(*iv*) *Montrer que toute application propre est* universellement fermée, *i.e. pour tout espace topologique Z, l'application induite $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ est fermée.*

(*v*) *Montrer la réciproque de (iii) lorsque X et Y sont localement compacts. On pourra pour ce faire introduire le compactifié d'Aleksandrov Z d'une fibre de f.*

D'après [Bou, I.10.2], (v) est en fait valable pour des espaces topologiques X, Y quelconques.

Exercice 1.6.7 (k-espaces). *Un espace topologique X est un k-*espace *si sa topologie est déterminée e par les applications continues $f : K \to X$ avec K compact, i.e. $Y \subset X$ est fermé ssi $f^{-1}(Y)$ est fermé pour toute telle application f.*

(i) Montrer que tout quotient d'un espace localement compact est un k-espace.

(ii) Montrer que le quotient de $\mathbb{R}$ qui envoie $\mathbb{N}$ sur un point n'est pas localement compact.

(iii) Montrer que pout tout k-espace on peut choisir un ensemble *d'applications continues $f_i : K_i \to X$ avec K_i compact dont les images recouvrent X et telles que $Y \subset X$ soit fermé ssi $f_i^{-1}(Y)$ fermé pour tout i.*

(iv) En déduire que tout k-espace est quotient d'un espace localement compact.

Espaces projectifs

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, de dimension finie n. On rappelle que V possède une topologie canonique, pour laquelle tout choix d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V induit un homéomorphisme $V \simeq \mathbb{K}^n$.

L'*espace projectif* $\mathbb{P}(V)$ est défini comme l'ensemble des droites (vectorielles) de V. Le groupe $\mathbb{K}^\times$ agit sur $V \setminus \{0\}$ par homothéties, et l'application $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ qui envoie v sur la droite Kv induit une bijection

$$(V \setminus \{0\})/\mathbb{K}^\times \simeq \mathbb{P}(V).$$

On munit $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient, de sorte qu'une partie $U \subset \mathbb{P}(V)$ est ouverte ssi $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de V. Il s'agit donc de la topologie la plus fine pour laquelle π est continue.

Exercice 1.6.8. *Montrer que l'action de $\mathbb{K}^\times$ sur $V \setminus \{0\}$ est propre et libre, et que $\mathbb{P}(V)$ est compact.*

Exercice 1.6.9. *Montrer que l'application $V \to \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{K})$ qui envoie v sur la droite engendrée par $(v, 1)$ est un homéomorphisme de V sur le complémentaire de $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V \oplus \{0\}) \subset \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{K})$.*

On appelle $\mathbb{P}(V \oplus \mathbb{K})$ la *compactification projective* de V, et $\mathbb{P}(V)$ *l'hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}(V \oplus \mathbb{K})$

Grassmanniennes

Pour tout entier $0 \leq r \leq n$, on définit plus généralement la *grassmannienne* $\mathrm{Gr}(r, V)$ comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels $U \subset V$ de dimension r. On note $V_0^r \subset V^r$ l'ensemble des r-uplets linéairement indépendants $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_r)$, et on munit $\mathrm{Gr}(r, V)$ de la topologie la plus fine rendant continue l'application

$$\pi : V_0^r \to \mathrm{Gr}(r, V)$$

définie par $\pi(\vec{v}) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r)$.

Exercice 1.6.10. *Montrer que V_0^r est ouvert dans V^r.*

Exercice 1.6.11. *Le groupe* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ *agit sur* V_0^r *par*

$$g \cdot (v_1, \ldots, v_r) = \left(\sum_i g_{1i} v_i, \ldots, \sum_i g_{ri} v_i \right).$$

Montrer que π *induit un homéomorphisme* $V_0^r / \mathrm{GL}(r, \mathbb{K}) \simeq \mathrm{Gr}(r, V)$.

Exercice 1.6.12. *Le groupe* $\mathrm{GL}(V)$ *agit également sur* V_0^r*, via*

$$a \cdot (v_1, \ldots, v_r) = (av_1, \ldots, av_r).$$

Vérifier que cette action est transitive, qu'elle commute à celle de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$*, et qu'elle induit une action transitive de* $\mathrm{GL}(V)$ *sur* $\mathrm{Gr}(r, V)$.

Exercice 1.6.13. *Pour tout r-uplet* $\vec{v} = (v_i) \in V_0^r$*, montrer que l'application d'orbite* $\mathrm{GL}(V) \to V_0^r$ $a \mapsto a \cdot \vec{v}$ *est ouverte, et en déduire que tout compact de* V_0^r *est de la forme* $Q \cdot \vec{v}$ *avec* $Q \subset \mathrm{GL}(V)$ *compact. On pourra par exemple s'appuyer sur les exercices 1.3.6 et 1.4.12.*

Exercice 1.6.14. *Utiliser l'exercice précédent pour montrer que l'action de* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ *sur* V_0^r *est propre.*

Exercice 1.6.15. *On fixe une norme sur* V*, euclidienne ou hermitienne selon que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Montrer que le groupe des isométries* $\mathrm{Iso}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ *agit transitivement sur* $\mathrm{Gr}(r, V)$*, et conclure que* $\mathrm{Gr}(r, V)$ *est compacte, homéomorphe à l'espace quotient*

$$\mathrm{Iso}(V) / \mathrm{Iso}(U) \times \mathrm{Iso}(U^\perp)$$

pour tout $U \in \mathrm{Gr}(r, V)$.

Chapitre 2

Variétés

2.1 Atlas et variétés

Soit X un ensemble. Une *carte* (U, ϕ) de X est la donnée d'une partie $U \subset X$ et d'une injection $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ dont l'image $\phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que la carte est *centrée en* $x \in X$ si $\phi(x) = 0$.

Deux cartes $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ sont *compatibles* si $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ et $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^p$ sont ouverts et les *applications de transition*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

et

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

sont lisses (i.e. de classe C^∞). Les ouverts $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ et $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^p$ sont alors difféomorphes, et on a donc $n = p$ dès que $U \cap V$ est non-vide.

Un *atlas* sur X est une famille (U_i, ϕ_i) de cartes de X deux à deux compatible telles que les U_i recouvrent X. La donnée d'un atlas détermine une topologie sur X, pour laquelle $U \subset X$ est ouvert ssi $\phi_i(U \cap U_i) \subset \mathbb{R}^{n_i}$ est ouvert pour tout i.

Deux atlas (U_i, ϕ_i) et (V_j, ψ_j) sont *équivalents* si leurs cartes (U_i, ϕ_i), (V_j, ψ_j) sont deux à deux compatibles ; la topologie associée est alors la même.

Définition 2.1.1. Une *variété* X est un ensemble muni d'une classe d'équivalence d'atlas, telle que la topologie associée soit de plus *séparée*.

On ajoutera au chapitre 4 une condition supplémentaire afin de contrôler la «taille» des variétés.

L'espace topologique sous-jacent à une variété est séparé, et localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, i.e. une *variété topologique*. L'espace X est donc localement compact, localement connexe par arc, et localement à base dénombrable. En particulier, les composantes connexes de X sont ouvertes et connexes par arcs.

On définit une carte (U, ϕ) d'une variété X comme une carte ensembliste comme ci-dessus, qui soit de plus compatible avec les cartes d'un (et donc de tout) atlas dans la classe d'équivalence donnée. La restriction $(V, \phi|_V)$ à un ouvert $V \subset U$ reste alors une carte. En pratique, on pense souvent à une carte de X comme la donnée de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur un ouvert U, qu'on appelle aussi *ouvert de coordonnées*. La collection de toutes les cartes de X forme un atlas représentant la classe d'équivalence donnée, et qui est clairement maximal pour cette propriété. En pratique, on ne fait pas de distinction entre une classe d'équivalence d'atlas et son représentant maximal.

La *dimension* d'une variété X en un point $x \in X$ est l'entier $\dim_x X$ tel que toute carte contenant x arrive dans $\mathbb{R}^{\dim_x X}$. Par définition, la fonction $x \mapsto \dim_x X$ est localement constante, et donc constante sur chaque composante connexe de X. Sauf mention du contraire, on supposera que X est purement de dimension n, i.e. que chaque composante connexe de X est de dimension n.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre variétés. Pour tout $x \in X$, on peut trouver des cartes (U, ϕ) et (V, ψ) de X et Y contenant respectivement x et $f(x)$ et telles que $f(U) \subset V$. On dit que f est de classe C^r (ou lipschitzienne, α-hölderienne, etc..) au voisinage de x si l'application induite $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ a cette propriété au voisinage de $\phi(x)$. En particulier, un *C^r-difféomorphisme* est une bijection de classe C^r dont l'inverse est aussi de classe C^r.

Remarque 2.1.2. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on peut définir de même une variété de classe C^r en demandant que les applications de transition entre les cartes d'un atlas soient de classe C^r. Mais dès que l'espace topologique sous-jacent est «raisonnable» (à savoir séparé et à base dénombrable, hypothèses standard que nous ferons systématiquement le temps venu), Whitney a montré qu'une variété C^r avec $r \geq 1$ est automatiquement lissable, i.e. C^r-difféomorphe à une variété C^∞, celle-ci étant de plus unique à C^∞-difféomorphisme près (cf. théorème 9.2.3 plus bas). L'étude des variétés de classe C^r avec $r \geq 1$ est ainsi essentiellement équivalente à celle des variétés lisses (mais ceci ne vaut bien sûr pas pour les *applications* entre de telles variétés !).

Pour $r = 0$, la situation est radicalement différente. Une variété topologique compacte (de dimension au moins 4) peut n'être homéomorphe à aucune variété lisse (cf. [Kui67, Theorem 2] pour un exemple très explicite, donné par une équation polynomiale de degré 8), et deux variétés lisses compactes peuvent être homéomorphes sans être difféomorphes («sphères exotiques» de Milnor [Mil56]).

Exercice 2.1.3. *Si X et Y sont deux variétés, montrer que leur produit $X \times Y$ est muni d'une unique structure de variété satisfaisant la propriété suivante : les projections sur X et Y sont lisses, et toute paire d'applications lisses $f : Z \to X$ et $g : Z \to Y$ induit une application lisse $Z \to X \times Y$.*

Remarque 2.1.4. Nous serons occasionnellement amenés à parler de *variété complexe* X, qui est définie la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas (U_i, ϕ_i) dont les cartes sont à valeurs dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, et telles que les différentielles des applications de transition $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ soient $\mathbb{C}$-linéaires. Cette condition, qui équivaut à l'équation de Cauchy-Riemann, implique que les applications de transition sont en fait holomorphes, i.e. localement développables en série entière, mais ceci ne jouera pas de rôle pour nous. Une variété complexe possède une *dimension complexe* $\dim_{\mathbb{C}} X$, égale à la moitié de sa dimension réelle. Une variété complexe de dimension complexe 1 est appelée *surface de Riemann.*

2.2 Espaces tangents

L'espace tangent T_xX à une variété X en l'un de ses points x est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\dim_x X$, qui constitue une linéarisation canonique de X en ce point. Les espaces tangents sont construits par propagation du cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, en imposant simplement la formule habituelle pour la dérivée d'une composée.

Théorème 2.2.1. *A isomorphisme unique près, il existe une unique façon d'associer à toute paire (X, x) formé d'une variété X et d'un point $x \in X$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel T_xX de dimension $\dim_x X$ avec les propriétés suivantes :*

1. ***fonctorialité :*** *toute application lisse $f : X \to Y$ entre variétés induit une application linéaire $d_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$, et l'on a $d_x \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{T_xX}$ et $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_xf$;*
2. ***localité :*** *si $\iota : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert contenant x, alors $d_x\iota : T_xU \to T_xX$ est un isomorphisme ;*
3. ***compatibilité :*** *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, et la différentielle d'une application lisse entre ouverts euclidiens coïncide avec la notion habituelle.*

On peut reformuler les deux premières conditions en disant qu'on a affaire à un *foncteur* de la catégorie des germes de variétés (X, x) vers la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration. Les conditions impliquent que toute carte (U, ϕ) centrée en $x \in X$ induit un isomorphisme $d_x\phi : T_xX \simeq \mathbb{R}^n$. Si (V, ϕ) est une seconde carte centrée en x, les images respectives $v, w \in \mathbb{R}^n$ d'un vecteur donné de T_xX sous $d_x\phi$, $d_x\psi$ satisfont de plus $d_0(\psi \circ \phi^{-1})v = w$. On obtient alors existence et unicité en définissant T_xX comme le quotient de l'ensemble des paires (ϕ, v) formées d'une carte (U, ϕ) centrée en x et d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, modulo la relation d'équivalence

$$(\phi, v) \sim (\psi, w) \iff d_0(\psi \circ \phi^{-1})v = w.$$

□

Il est important de souligner que la description explicite des espaces tangents donnée dans la preuve ne sera pas utilisée en pratique ; seules comptent les trois propriétés ci-dessus.

On appelle *courbe* tracée sur X une application lisse $\gamma : I \to X$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. La différentielle $d_t\gamma$ et $t \in I$, application linéaire de $T_tI = \mathbb{R}$ dans $T_{\gamma(t)}X$, est uniquement déterminée par l'image de $1 \in \mathbb{R}$, notée $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}X$ et appelée *vecteur vitesse.*

Exercice 2.2.2. *Pour tout vecteur tangent $v \in T_xX$, il existe une courbe $\gamma :]-1,1[\to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*

Exercice 2.2.3. *Si X, Y sont deux variétés, montrer que les différentielles des projections induisent pour tous $(x,y) \in X \times Y$ un isomorphisme*

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_xX \times T_yY.$$

Exercice 2.2.4. *On note $C^\infty(X,x)$ l'anneau des germes de fonctions lisses $f : (X,x) \to \mathbb{R}$. Pour tout $v \in T_xX$, montrer que la forme linéaire $D_v : C^\infty(X,x) \to \mathbb{R}$ définie par $D_vf := d_xf(V)$ est une dérivation, i.e. satisfait la formule de Leibniz*

$$D_v(fg) = (D_vf)g + f(D_vg).$$

Etablir que $v \mapsto D_v$ induit un isomorphisme entre T_xX et l'espace des dérivations $D : C^\infty(X,x) \to \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.5. Si X est une variété complexe (cf. remarque 2.1.4), les espaces tangents T_xX sont naturellement des espaces vectoriels complexes.

2.3 Cartes généralisées et quotients

Cartes généralisées

Maintenant qu'on dispose de la notion de variété, on peut étendre le concept de carte et obtenir plus généralement des variétés en en recollant d'autres le long d'ouverts.

Exercice 2.3.1. *Soit X un ensemble et $\psi_i : X_i \to X$ une famille d'injections où chaque X_i est une variété et chaque application de transition*

$$\psi_{ij} := \psi_j^{-1} \circ \psi_i : X_{ij} := \psi_i^{-1}(\psi_j(X_j)) \to X_{ji} := \psi_j^{-1}(\psi_i(X_i))$$

est un difféomorphisme entre ouverts de X_i et X_j. Montrer que X admet une unique structure de variété pour laquelle chaque ψ_i est un difféomorphisme de X_i sur un ouvert de X.

Corollaire 2.3.2. *Soit $\pi : X \to Y$ un homéomorphisme local entre espaces topologiques. Si Y est une variété, X est muni d'une unique structure de variété telle que π soit un difféomorphisme local.*

Démonstration. On peut recouvrir X par des ouverts U_i sur lequel la restriction de π est un homéomorphisme sur un ouvert V_i de Y, dont on note $\psi_i : V_i \to X$ l'inverse. L'application de transition $\psi_{ij} : V_{ij} = V_i \cap V_j \to V_{ji} = V_j \cap V_i$ est simplement l'identité, et l'exercice 2.3.1 montre donc que X admet une unique structure de variété pour laquelle chaque ψ_i est un difféomorphisme sur un ouvert ; cette structure est clairement la seule pour laquelle π est un difféomorphisme local. $\square$

En particulier, tout homéomorphisme ϕ d'une variété X définit sur l'espace topologique sous-jacent à X une nouvelle structure de variété X_ϕ, qui ne coïncide avec celle de départ que si ϕ est un difféomorphisme de X. Cependant, ϕ est un difféomorphisme entre X_ϕ et X, par construction.

Exemple 2.3.3. L'homéomorphisme $x \mapsto x^3$ définit une nouvelle structure de variété sur $\mathbb{R}$, pour laquelle $x \mapsto x^{1/3}$ est une fonction lisse !

Quotient par un groupe

On rappelle (corollaire 1.5.8) que si G est un groupe agissant proprement discontinûment et librement sur un espace topologique localement compact X, alors l'espace des orbites X/G est localement compact (séparé), et l'application quotient $\pi : X \to X/G$ est un homéomorphisme local.

Théorème 2.3.4. *Si G est un groupe (discret) agissant proprement discontinûment et librement par difféomorphismes sur une variété X, alors X/G admet une unique structure de variété telle que $\pi : X \to X/G$ soit un difféomorphisme local.*

Démonstration. D'après la proposition 1.5.7, on peut recouvrir X par des ouverts X_i tels que $g \cdot X_i$ rencontre X_i seulement pour $g = e$, ce qui garantit que la restriction $\psi_i : X_i \hookrightarrow X/G$ est un homéomorphisme sur un ouvert L'unique structure de variété de X/G telle que π soit un difféomorphisme local est celle pour laquelle les ψ_i sont des difféomorphismes. L'unicité est donc claire, et l'existence revient à vérifier que chaque application de transition

$$\psi_{ij} := \psi_j^{-1} \circ \psi_i : X_{ij} := \psi_i^{-1}(\psi_j(X_j)) \to X_{ji} := \psi_j^{-1}(\psi_i(X_i))$$

est un difféomorphisme entre ouverts de X_i et X_j (cf. exercice 2.3.1). Or on a

$$X_{ij} = X_i \cap \pi^{-1}(\pi(X_j)) = X_i \cap G \cdot X_j = \coprod_{g \in G} X_i \cap (g \cdot X_j),$$

et la restriction de ψ_{ij} à $X_i \cap gX_j$ coïncide avec g^{-1} ; elle est donc lisse. $\square$

Exemple 2.3.5 (Tore de suspension)**.** Pour toute difféomorphisme ϕ d'une variété F, le tore de suspension M_ϕ, quotient de $\mathbb{R} \times F$ par l'action de $(t, x) \mapsto (t+1, \phi(x))$, est muni d'une unique structure de variété telle que la projection $\mathbb{R} \times F \to M_\phi$ soit un difféomorphisme local, et la projection naturelle $M_\phi \to S^1$ est lisse. Ceci s'applique en particulier au ruban de Möbius et à la bouteille de Klein

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 (Sphères)**.** *On note (x, t) les coordonnées de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère euclidienne unité centrée en 0, et $p_\pm = (0, \pm 1)$ ses pôles nord et sud. Les* projections stéréographiques *$\pi_\pm : S^n \setminus \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^n$ associent à $x \in S^n \setminus \{p_\pm\}$ l'unique point d'intersection de la droite passant par $p_\pm$ et x avec l'hyperplan équatorial $t = 0$ (faire une dessin avec $n = 1$).*

(*i*) *Vérifier que $\pi_\pm$ est un homéomorphisme donné par $\pi_\pm(x, t) = x/(1 - \pm t)$, et que son inverse $\phi_\pm : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{p_\pm\}$ vérifie*

$$\phi_\pm(x) = \left(\frac{2x}{1 + |x|^2}, \pm \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right).$$

(*ii*) *En déduire que les applications de transition $\phi_+ \circ \phi_-^{-1}$ et $\phi_- \circ \phi_+^{-1}$ coïncident avec l'inversion $x \mapsto x/|x|^2$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans lui-même, et que S^n est ainsi munie d'une structure de variété compacte de dimension n.*

(*iii*) *Montrer que l'inclusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est lisse, et que sa différentielle identifie $T_x S^n$ avec l'hyperplan orthogonal à x.*

Exercice 2.4.2 (Tores)**.** *Vérifier que le groupe discret $\mathbb{Z}^n$ agit proprement et librement sur $\mathbb{R}^n$ par translation, et montrer que*

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \mapsto (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_n})$$

induit un difféomorphisme $T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (S^1)^n$.

Exercice 2.4.3 (Espaces projectifs)**.** *On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D'après l'exercice 1.6.8, l'espace projectif*

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) \simeq (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^\times$$

est compact pour la topologie quotient. On note $[t] = [t_0 : \ldots : t_n]$ l'image de $t = (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'application quotient

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K}),$$

et on parle de coordonnées homogènes *sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. On va montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ est muni d'une unique structure de variété telle qu'une application $f : \Omega \to Y$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ soit lisse ssi $f \circ \pi$ est lisse.*

(*i*) *Pour* $i = 0, \ldots, n$ *on définit* $\phi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *par*

$$\phi_i(x) = [x_1 : \ldots : x_i : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n].$$

Montrer que ϕ_i *est un homéomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *sur l'ouvert*

$$\Omega_i := \{[t] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid t_i \neq 0\},$$

d'inverse $\Omega_i \to \mathbb{K}^n$ *donné par*

$$[t] \mapsto x = (t_0/t_i, \ldots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \ldots, t_n/t_i),$$

appelées coordonnées affines sur la carte Ω_i.

(*ii*) *Décrire les applications de transition* $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, *et en déduire que* $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *est muni d'une structure de variété, réelle ou complexe selon que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *de dimension (réelle ou complexe)* n.

(*iii*) *Montrer que la restriction de la projection* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *à la sphère unité* S^n *induit un difféomorphisme* $S^n/\pm \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, *où l'on note* $\pm$ *l'action sur* S^n *de l'involution sans point fixe* $x \mapsto -x$.

Exercice 2.4.4 (Droites projectives). *Montrer que les applications*

$$S^1 \setminus \{p_+\} \simeq \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

et

$$S^2 \setminus \{p_+\} \simeq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),$$

compositions des projections stéréographiques et des plongements canoniques $K \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K)$, *s'étendent en des difféomorphismes* $S^1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *et* $S^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (sphère de Riemann).

Exercice 2.4.5 (Grassmanniennes). *A nouveau,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* V *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel dimension finie* n. *D'après l'exercice 1.6.15, la grassmannienne* $\mathrm{Gr}(r, V)$ *est un espace topologique compact qui paramètre les sous-espaces* $U \subset V$ *de dimension* r. *On va la munir d'une structure de variété (réelle ou complexe) de dimension* $r(n-r)$. *Pour tout sous-espace* $S \subset V$ *de codimension* r, *on note* $\Omega_S \subset \mathrm{Gr}(r, V)$ *l'ensemble des sous-espaces* $U \subset V$ *de dimension* r *tels que* $U \cap S = \{0\}$, *i.e.* $V = U \oplus S$.

(*i*) *Montrer que* Ω_S *est ouvert. Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* V, *montrer que* $\mathrm{Gr}(r, V)$ *est recouverte par les* $\Omega_I := \Omega_{\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}}$ *avec* $I \subset \{1, \ldots, n\}$ *de cardinal* $n - r$.

(*ii*) *Etant donné* $U_0 \in \Omega_S$, *montrer qu'un sous-espace* $U \subset V$ *appartient à* Ω_S *ssi* U *est le graphe d'une application linéaire* $\alpha_U \in \mathrm{Hom}(U_0, S)$, *et que l'application* $\Omega_S \to \mathrm{Hom}(U_0, S)$ *ainsi définie est un homéomorphisme. On l'appelle* carte affine centrée en U_0.

(*iii*) *Le choix d'un autre point* $U_0' \in \Omega_S$ *définit de même une carte affine* $\Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0', S)$ *centrée en* U_0'. *Montrer que l'application de transition*

$$\mathrm{Hom}(U_0, S) \simeq \Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0', S)$$

coïncide avec l'isomorphisme affine

$$\alpha \mapsto (\alpha - \alpha_{U_0'}) \circ \phi,$$

où $\phi : U_0' \simeq U_0$ *désigne l'isomorphisme de projection parallèlement à* S, *et* $\alpha_{U_0'} \in \mathrm{Hom}(U_0, S)$ *l'image de* U_0' *par la carte* $\Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0, S)$ *centrée en* U_0.

(*iv*) *On considère maintenant un autre supplémentaire* $S' \subset V$ *de* U_0, *qui appartient donc à deux cartes*

$$\Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0, S), \;\; \Omega_{S'} \simeq \mathrm{Hom}(U_0, S')$$

centrées en U_0. *On note* $p : V \to U_0$ *et* $q : V \to S'$ *les projections associées à la décomposition* $V = U_0 \oplus S'$. *Montrer que l'image de* $\Omega_S \cap \Omega_{S'}$ *dans la carte* $\Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0, S)$ *est l'ouvert des* $\alpha \in \mathrm{Hom}(U_0, S)$ *tel que*

$$\phi_\alpha := \mathrm{id}_{U_0} + p \circ \alpha \in \mathrm{End}(U_0)$$

soit un isomorphisme, et que l'application de transition entre les deux cartes est donnée par $\alpha \mapsto q \circ \alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$.

(*v*) *Déduire de ce qui précède que* $\mathrm{Gr}(r, V)$ *est munie d'une unique structure de variété (réelle ou complexe selon que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) compatible avec les cartes* $\Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U_0, S)$.

(*vii*) *Pour tout* $U \in \mathrm{Gr}(r, V)$, *le choix d'un supplémentaire* S *induit une carte* $\phi : \Omega_S \simeq \mathrm{Hom}(U, S)$ *centrée en* U *et un isomorphisme* $S \simeq V/U$. *Montrer que l'isomorphisme*

$$T_U \,\mathrm{Gr}(r, V) \simeq \mathrm{Hom}(U, V/U).$$

induit par $d_U\phi$ *est indépendant du choix de* S.

Exercice 2.4.6 (Surface de Prüfer)**.** *On pose* $U := \mathbb{R}^2$, $U^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\times$, *et* $U_a := U \times \{a\}$, $U_a^+ = U^+ \times \{a\}$ *pour chaque* $a \in \mathbb{R}$.

(*i*) *Montrer qu'on définit un difféomorphisme* $\pi_a : U_a^+ \to U^+$ *en posant*

$$\pi_a(x, y) = (a + xy, y).$$

(*ii*) *Pour chaque partie* $A \subset \mathbb{R}$, *on note* P_A *la variété obtenue en recollant les variétés* $(U_a)_{a \in A}$ *le long des ouverts* $U_a^+ \simeq U^+$. *Montrer que* P_A *est une variété séparée connexe de dimension* 2.

(*iii*) *Montrer que* P_A *est à base dénombrable ssi* A *est dénombrable.*

Chapitre 3

Sous-variétés

3.1 Sous-variétés et plongements

Une *sous-variété* d'une variété X est un sous-ensemble $Z \subset X$ tel que la paire (X, Z) soit localement difféomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ au voisinage de tout point de Z. En d'autres termes, pour tout point $z \in Z$ donné on peut trouver des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ pour X centrées en z telles que Z soit localement donné par les équations $x_1 = \dots = x_q = 0$. L'entier $q = n - p$ est la *codimension* de Z en x, notée $\operatorname{codim}_x Z$.

Par définition, une sous-variété Z est une partie localement fermée de X, et elle hérite de plus d'une structure de variété, pour laquelle l'inclusion $Z \hookrightarrow X$ est en particulier lisse. La différentielle de cette dernière induit pour tout $z \in Z$ une injection $T_z Z \hookrightarrow T_z X$, via laquelle on identifie $T_z Z$ à un sous-espace de $T_z X$.

Exemple 3.1.1. Une sous-variété $Z \subset X$ est de codimension 0 (resp. n) ssi Z est un ouvert (resp. un sous-ensemble discret) de X.

Exercice 3.1.2. *Si une application lisse $f : Y \to X$ sur variété Y est à valeurs dans une sous-variété $Z \subset X$, elle est lisse en tant qu'application $Y \to Z$.*

Exercice 3.1.3. *Si $Z \subset X$ est une sous-variété, $T_z Z$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs vitesse $\gamma'(0)$ de courbes $\gamma :]-1, 1[\to X$ avec $\gamma(0) = z$ et d'image contenue dans Z (cf. exercice 2.2.2).*

En pratique, la preuve du fait qu'un sous-ensemble donné est une sous-variété passe presque toujours par le théorème d'inversion locale et ses conséquences, cf. remarque 3.3.9.

Exercice 3.1.4. *Si $Z \subset X$ est une sous-variété, toute sous-variété Z' de Z est aussi une sous-variété de X. De plus, $Z' \subset Z \subset X$ est localement difféomorphe à un drapeau $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^n$ au voisinage de tout point de Z'.*

Définition 3.1.5. Un *plongement* $f : Y \hookrightarrow X$ est une application lisse dont l'image $Z = f(Y)$ est une sous-variété de X et qui induit un difféomorphisme $Y \simeq Z$. On dit que f est un *plongement fermé* (*resp. ouvert*) si Z est fermée (resp. ouverte) dans X.

La différence entre un plongement et une sous-variété peut sembler mince, mais il est important de bien distinguer les deux concepts, l'un pouvant être plus naturel ou pertinent que l'autre, suivant le contexte.

Exemple 3.1.6. Une carte (U, ϕ) de X n'est autre qu'un plongement ouvert $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

D'après l'exercice 3.1.4, une composition de plongements est un plongement.

3.2 Le théorème du rang constant

Une application lisse $f : X \to Y$ entre variétés est un *difféomorphisme local* en $x \in X$ s'il existe des voisinages ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ de x et $y = f(x)$ tels que f induise un difféomorphisme $U \simeq V$. On abrègera ceci en $f : (X, x) \simeq (Y, y)$.

La forme suivante du théorème d'inversion locale découle immédiatement du cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.2.1. *Un application lisse $f : X \to Y$ est un difféomorphisme local en $x \in X$ ssi $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ est un isomorphisme.*

En particulier, f est un difféomorphisme dès qu'elle admet un inverse de classe C^1.

Le *rang* $\mathrm{rg}_x(f)$ en $x \in X$ d'une application lisse $f : X \to Y$ est défini comme celui de $d_x f$. On dit que f est *linéarisable* en $x \in X$ s'il existe des cartes (U, ϕ) et (V, ψ) de X et Y contenant respectivement x et $f(x)$ telles que $f(U) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit linéaire.

Exercice 3.2.2. *Montrer que $x \mapsto \mathrm{rg}_x(f)$ est semicontinue inférieurement sur X.*

Exercice 3.2.3. *Montrer que $f : X \to Y$ est linéarisable en $x \in X$ ssi il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ centrées en x et $f(x)$ dans lesquelles f est donnée par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$.*

L'énoncé suivant est connu sous le nom de *théorème du rang constant.*

Théorème 3.2.4. *Une application lisse $f : X \to Y$ est linéarisable en $x \in X$ ssi elle est de rang constant au voisinage de x.*

Démonstration. Une application linéaire est clairement de rang constant, et une application linéarisable est donc localement de rang constant. Pour la réciproque, il suffit de considérer le cas d'une application lisse $f : (V, 0) \to (W, 0)$, avec V, W deux espaces vectoriels. On pose $A := d_0 f$, et on choisit des décompositions en somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ et $W = W_1 \oplus W_2$ avec $V_2 = \operatorname{Ker} A$ et $W_1 = \operatorname{Im} A$, de sorte que $A_1 := A|_{V_1} : V_1 \to W_1$ est un isomorphisme. L'application $\phi : (V, 0) \to (V, 0)$ définie par $\phi(x_1, x_2) = (A_1^{-1} f_1(x_1, x_2), x_2)$ satisfait $d_0\phi = \mathrm{id}_V$, donc est un difféomorphisme local en 0. Par construction, $g := f \circ \phi^{-1} : (V, 0) \to (W, 0)$ a pour première composante $g_1 = A = d_0 g$. Puisque g est aussi de rang constant, on en déduit que sa seconde composante $g_2(x_1, x_2)$ est indépendante de x_2 au voisinage de 0. Mais le difféomorphisme local $\psi : (W, 0) \to (W, 0)$ défini par $\psi(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g_2(A_1^{-1} y_1))$ satisfait alors $\psi \circ g = A$, ce qui montre que f est linéarisable. $\square$

Corollaire 3.2.5. *Si $f : X \to Y$ est de rang constant, alors chaque fibre F est une sous-variété fermée de X, d'espace tangent en $x \in F$ donné par $T_x F = \operatorname{Ker} d_x f$.*

3.3 Submersions et immersions

Une application lisse $f : X \to Y$ est une *submersion* (resp. une *immersion*) en $x \in X$ ssi $d_x f$ est surjective (resp. injective). L'exercice 3.2.2 implique que l'ensemble des $x \in X$ en lesquels f est une submersion (resp. une immersion) est un ouvert, non vide seulement si $\dim X \geq \dim Y$ (resp. $\dim X \leq \dim Y$).

Exercice 3.3.1. *Une application lisse $f : X \to \mathbb{R}^p$ de composantes $f_1, \dots, f_p$ est une submersion (resp. une immersion) en $x \in X$ ssi les différentielles $d_x f_1, \dots, d_x f_p \in T_x^\star X$ forment une famille libre (resp. génératrice).*

Le résultat suivant, conséquence du théorème du rang constant, décrit la structure locale des submersions.

Théorème 3.3.2. *Une application lisse $f : X \to Y$ est une submersion en $x \in X$ ssi elle est localement isomorphe à une projection, i.e. pour tout $x \in X$, il existe des voisinages ouverts $x \in U \subset X$ et $y = f(x) \in V \subset Y$, une variété F et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "f"'] & & V \times F . \arrow[dl, "p_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Exercice 3.3.3. *Une submersion $f : X \to Y$ est une application ouverte.*

Exercice 3.3.4. *Si $f : X \to Y$ est une submersion et $Z \subset Y$ est une sous-variété de Y, alors $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété de X.*

Exercice 3.3.5. *Une submersion surjective $\pi : X \to Y$ satisfait la propriété universelle suivante : toute application lisse $f : X \to Z$, constante le long des fibres de π, induit une unique application lisse $\bar{f} : Y \to Z$ telle que $f = \pi \circ \bar{f}$.*

Remarque 3.3.6. La réciproque est fausse, comme le montre l'application lisse surjective $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto xy$ [Lee, Problem 4.8].

Dans le cas des immersions, le théorème de structure prend la forme suivante.

Théorème 3.3.7. *Une application lisse $f : X \to Y$ est une immersion en x ssi f admet un voisinage ouvert $U \subset X$ tel que $f|_U : U \to Y$ soit un plongement.*

Corollaire 3.3.8. *Une application lisse $f : X \to Y$ est un plongement ssi f est une immersion et un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. Supposons que $f : X \to Y$ soit une immersion, et qu'elle induise un homéomorphisme sur son image $Z := f(X)$. D'après le théorème 3.3.7, pour chaque $y \in Z$, l'antécédent $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $f|_U$ soit un plongement. Puisque f est un homéomorphisme sur son image, $f(U)$ est un ouvert de Z, et donc $f(U) = Z \cap V$ pour un voisinage ouvert $V \subset Y$ de y. Il en résulte que Z est une sous-variété et que f induit un difféomorphisme $X \simeq Z$. □

Remarque 3.3.9. Les résultats précédents fournissent les deux outils utilisés quasi-systématiquement pour démontrer qu'un sous-ensemble $Z \subset X$ donné est une sous-variété : soit on exhibe des équations locales $f_1 = \cdots = f_q = 0$ pour Z dont les différentielles sont linéairement indépendantes, soit on dispose d'une immersion injective $f : Y \to X$ d'image Z, et on montre que f est un homéomorphisme sur son image, par exemple en vérifiant que pour une suite $y_i \to \infty$ dans Y, $f(y_i)$ ne peut converger vers un point de Z (corollaire 1.4.28).

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 (Sphères)**.** *Vérifier que $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_i x_i^2$ est une submersion en dehors de 0. En déduire que S^n est une sous-variété de codimension un, et décrire ses espaces tangents. Pourquoi la structure de variété induite sur S^n est-elle compatible avec celle de l'exercice 2.4.1 ?*

Exercice 3.4.2 (Tores)**.** *Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\cos\theta_1(2 + \cos\theta_2), \sin\theta_1, \sin\theta_2)$$

induit un plongement du tore $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ comme surface de révolution de $\mathbb{R}^3$, qu'on dessinera.

Exercice 3.4.3 (Ruban de Möbius)**.** *Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$\phi(\theta, t) = (\cos(2\pi\theta)(4 + \cos(\pi\theta)\arctan t), \sin(2\pi)\theta, 4 + \sin(\pi\theta)\arctan t))$$

induit un plongement (localement fermé) du ruban de Möbius M dans $\mathbb{R}^3$ (qui correspond à sa réalisation via un ruban de papier).

On verra plus tard que M, n'étant pas orientable, ne peut admettre de plongement *fermé* dans $\mathbb{R}^3$ (cf. exercice 7.5.2).

Exercice 3.4.4. *Montrer que le «cusp» $Z = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\right\}$ n'est pas une sous-variété, en vérifiant par exemple qu'il n'existe pas d'immersion $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ d'image contenue dans Z.*

Exercice 3.4.5. *Toute application lisse est la composée d'un plongement fermé et d'une submersion (penser au graphe).*

Exercice 3.4.6. *Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est une droite de pente irrationnelle, montrer que l'application induite $f : D \to T^2$ est une immersion injective d'image dense.*

Exercice 3.4.7. *Si X est une variété et Y un espace topologique avec une application continue surjective $\pi : X \to Y$, montrer que Y admet au plus une structure de variété pour laquelle π devienne lisse et submersive.*

Exercice 3.4.8. *Montrer que la structure de variété de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r, V)$ définie dans l'exercice 2.4.5 est la seule pour laquelle l'application quotient $\pi : V_0^r \to \mathrm{Gr}(r, V)$ est une submersion.*

Exercice 3.4.9. *Soit $f : X \to Y$ une immersion injective.*

(*i*) *f est un plongement fermé (resp. ouvert) ssi f est propre (resp. $\dim X = \dim Y$).*

(*ii*) *La restriction de f à tout ouvert relativement compact est un plongement.*

Exercice 3.4.10. *Soient Z, Z' deux sous-variétés de X. Si Z' est contenue dans Z (en tant qu'ensemble), alors Z' est une sous-variété de Z.*

Exercice 3.4.11. *Si $f : X \to Y$ est une immersion et Z est une variété, une application continue $g : Z \to X$ est lisse ssi $f \circ g : Z \to Y$ est lisse.*

Exercice 3.4.12 (Eclatement d'un point)**.** *Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on se place dans la catégorie des variétés réelles ou complexes, respectivement. On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $V \simeq \mathbb{K}^n$ de dimension n, et on considère $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ comme l'espace des droites vectorielles $L \subset V$. On définit l'*éclatement *de $0 \in V$ comme la «variété d'incidence»*

$$B_0V := \{(x, L) \in V \times \mathbb{P}(V) \mid x \in L\},$$

munie de la restriction $\pi : B_0V \to V$ de la première projection.

(*i*) *On note* $[t_1 : \ldots : t_n]$ *les coordonnées homogènes de* $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$. *Montrer que*

$$B_0\mathbb{K}^n = \left\{(x,[t]) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \mid x_i t_j = x_j t_i \text{ pour tous } i,j\right\},$$

En déduire que B_0V *est une sous-variété fermée de* $V \times \mathbb{P}(V)$, *que* ψ *induit un difféomorphisme au dessus de* $V \setminus \{0\}$, *et que*

$$E := \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}(V)$$

est un sous-variété de B_0V. *Les fibre de l'application* π *sont donc toutes des sous-variétés, mais* π *est-elle pour autant une submersion ?*

(*ii*) *On note* $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})_i = \{t_i \neq 0\}$ *les cartes affines de* $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$. *Décrire un isomorphisme explicite entre*

$$(B_0\mathbb{K}^n)_i := \left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})_i\right) \cap B_0\mathbb{K}^n$$

et $\mathbb{K}^\star \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})_i$, *et donner l'expression de* π *dans les coordonnées correspondantes.*

(*iii*) *Montrer que* $B_0(\mathbb{R}^2)$ *est difféomorphe au ruban de Möbius.*

(*iv*) *Si* X *est une variété, on définit l'*éclatement de X en un point $x \in X$ *comme l'union disjointe*

$$B_xX = (X \setminus \{x\}) \coprod \mathbb{P}(T_xX),$$

munie de l'application $\pi : B_xX \to X$ *qui induit l'identité sur* $X \setminus \{x\}$ *et envoie* $\mathbb{P}(T_xX)$ *sur* x. *Montrer que* B_xX *est muni d'une unique structure de variété telle que l'inclusion* $X \setminus \{x\} \to B_xX$ *soit un plongement ouvert et que toute carte* (U,ϕ) *centrée en* x *induit un plongement ouvert* $B_0U \hookrightarrow B_xX$. *Montrer de plus que* π *est lisse, induit un difféomorphisme au dessus de* $X \setminus \{x\}$, *et que* $E = \pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(T_xX)$ *est une hypersurface de* B_xX *(qu'on appelera comme en géométrie algébrique le* diviseur exceptionnel *de l'éclatement).*

(V) Soit $Y \subset X$ *une sous-variété contenant* $x \in x$, *et notons* $F \subset B_xY \to Y$ *le diviseur exceptionnel de l'éclatement de* Y. *Montrer que le plongement*

$$B_xY \setminus F \simeq Y \setminus \{x\} \hookrightarrow X \setminus \{x\} \simeq B_xX \setminus E$$

s'étend de façon unique en un plongement $B_xY \hookrightarrow B_xX$, *dont l'image s'appelle* transformée stricte *de* Y *dans* B_xX. *Décrire la transformée stricte d'un arc* $\gamma : (\mathbb{R},0) \to (X,x)$ *avec* $\gamma'(0) \neq 0$.

(*vi*) *On note* $p_\pm$ *les pôles de* S^n. *Montrer que la composition*

$$B_{p_+}S^n \setminus E \simeq S^n \setminus \{p_+\} \simeq \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

de la restriction de π, *de la projection stéréographique* π_+ *et de l'inclusion* $t \mapsto [1 : t]$ *s'étend de façon unique en un difféomorphisme*

$$B_{p_+}S^n \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Montrer que l'application $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to S^n$ *ainsi définie peut être vue comme l'application qui envoie une droite* $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *sur la première colonne de la matrice représentant la projection orthogonale sur* L.

(*vii*) *L'éclatement* $B_0\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *en* $0 \in \mathbb{K}^n \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *est isomorphe à la variété d'incidence*

$$\{([x],[y]) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \mid \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = 0\},$$

avec $\pi : B_0\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ *correspondant à la restriction de la première projection.*

Chapitre 4

Partitions de l'unité

4.1 Espaces topologiques paracompacts

Familles localement finies

Soit X un espace topologique. On dit qu'une famille $(Y_i)_{i \in I}$ de parties de X est *localement finie* si tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert V ne rencontrant Y_i que pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

Remarque 4.1.1. Puisqu'un ouvert V intersecte Y_i ssi il intersecte $\bar{Y}_i$, une famille (Y_i) est localement finie ssi $(\bar{Y}_i)$ l'est.

Exercice 4.1.2. *Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de parties de X.*

(*i*) *Montrer que tout compact de X admet un voisinage ne rencontrant Y_i que pour un nombre fini de i.*

(*ii*) *Montrer que $\bigcup_i \overline{Y_i} = \overline{\bigcup_i Y_i}$.*

(*iii*) *Si la topologie de X est à base dénombrable, montre que*

$$I' := \{i \in I \mid Y_i \neq \emptyset\}$$

est nécessairement au plus dénombrable.

En particulier, (ii) montre que la réunion d'une famille localement finie de fermés est fermée.

Paracompacité

Définition 4.1.3. Un espace topologique X est *paracompact* s'il est séparé et si, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j \in J}$ de X qui le raffine, i.e. tel que chaque V_j soit contenu dans un des U_i.

On peut en fait toujours supposer que $I = J$ et $V_i \subset U_i$. En effet, il existe une fonction $f : J \to I$ telle que $V_j \subset U_{f(j)}$ (axiome du choix), et le recouvrement ouvert $(V_i')_{i\in I}$ défini par $V_i' := \bigcup_{f(j)=i} V_j$, qui satisfait $V_i' \subset U_i$, est localement fini car si $\Omega \subset X$ est un ouvert ne rencontrant V_j que pour un ensemble fini $K \subset J$ d'indices j, V_i' ne rencontre Ω que pour i dans l'ensemble fini $f(K) \subset I$.

Exercice 4.1.4. *Montrer que la paracompacité est héritée par les parties fermées.*

En général, ceci ne s'applique pas aux ouverts, cf. exercice 4.4.2 plus bas. Cette pathologie ne se produit cependant que dans des situations un peu exotiques, car un théorème (difficile) de Stone affirme que tout espace métrique est paracompact, et toute partie d'une espace métrique est donc elle aussi paracompacte. En pratique, on utilise la paracompacité sous la forme suivante.

Proposition 4.1.5 (Lemme de rétrécissement)**.** *Soit X un espace topologique paracompact. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_i)_{i\in I}$ tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout i.*

Comme on l'a remarqué, la famille de fermés $(\overline{V_i})$ est alors elle aussi localement finie.

Lemme 4.1.6. *Tout espace paracompact est régulier (cf. exercice 1.2.10).*

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'un fermé $A \subset X$ un point $x \in X \setminus A$ peuvent être séparés par des ouverts disjoints. L'espace X étant séparé, pour tout $a \in A$, on peut trouver deux ouverts U_a et V_a disjoints contenant respectivement x et a.

La paracompacité fournit recouvrement ouvert localement fini $(W_i)_{i\in I}$ de X raffinant celui donné par les V_a et U. On note $J \subset I$ l'ensemble des $i \in I$ tels que W_i est inclus dans un V_{a_i}, et on note qu'on a alors $x \notin \bar{W}_i$, puisque le voisinage U_{a_i} de x ne rencontre par W_i. Puisque (W_i) est localement finie, $Z = \bigcup_{i\in J} \overline{W_i}$ est un fermé (exercice 4.1.2), et $U := X \setminus Z$ est donc un voisinage ouvert de x disjoint du voisinage $\bigcup_{i\in J} W_i$ de A.

□

Preuve de la proposition 4.1.5. Tout point $x \in X$ appartient à un des U_i, et admet un voisinage ouvert d'adhérence contenue dans U_i, par le lemme 4.1.6. Ceci fournit un recouvrement ouvert $(W_j)_{j\in J}$ de X tel que $\overline{W_j} \subset U_{f(j)}$ pour une certaine fonction $f : J \to I$, et on peut de plus supposer (W_j) localement finie, par paracompacité de X. Comme on l'a vu, la famille obtenue en posant $V_i := \bigcup_{f(j)=i} W_j$ reste localement finie, et l'exercice 4.1.2 donne $\overline{V_i} = \bigcup_{f(j)=i} \overline{W_j} \subset U_i$. □

Dans le cas localement compact, la paracompacité admet la caractérisation suivante :

Théorème 4.1.7. *Un espace connexe localement compact X est paracompact ssi X est dénombrable à l'infini.*

Démonstration. Supposons que X est dénombrable à l'infini, et soit une exhaustion de X par une suite de compacts $K_n \Subset \mathring{K}_{n+1}$ (cf. exercice 1.4.22. Etant donné un recouvrement ouvert (U_i) de X, on peut recouvrir chaque couronne $K_{n+1} \setminus K_n$ par un nombre fini d'ouverts chacun contenu dans un des U_i et dans $K_{n+2} \setminus K_{n-1}$. L'ensemble de tous ces ouverts fournit un recouvrement ouvert localement fini de X raffinant (U_i), ce qui montre que X est paracompact.

On suppose réciproquement que X est paracompact, et on suit [Spi, p.460]. Par paracompacité, on peut trouver un recouvrement localement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X par des ouverts relativement compacts. On choisit $i_0 \in I$, et on pose $J_0 := \{i_0\}$. On construit par récurrence une suite croissante $J_n \subset J_{n+1} \subset I$ de parties finies en notant J_{n+1} l'ensemble des i tels que U_i rencontre le compact $\bigcup_{i\in J_n} \overline{U_i}$. La réunion J des J_n est au plus dénombrable, et $U := \bigcup_{i\in J} \overline{U_i} = \bigcup_{i\in J} U_j$ est dénombrable à l'infini. Il est de plus clair que U est ouvert et fermé dans X, et donc $U = X$ par connexité. $\square$

Corollaire 4.1.8. *Pour un espace X localement compact et localement connexe, sont équivalentes :*
(i) *X est paracompact ;*
(ii) *chaque composante connexe de X est dénombrable à l'infini.*

Si X n'est pas localement connexe, le bon énoncé est que X est paracompact ssi il admet une partition en ouverts (pas nécessairement connexes) dénombrables à l'infini.

Exercice 4.1.9. *Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et supposons donné pour chaque $x \in X$ une base de voisinages $\mathcal{V}_x$. Montrer que tout recouvrement ouvert (U_i) de X admet un raffinement localement fini (V_j) avec $V_j \in \mathcal{V}_{x_j}$ pour une certaine famille (x_j).*

4.2 Partitions de l'unité sur une variété

On suppose dans ce qui suit que X est une variété.

Définition 4.2.1. Une *partition de l'unité* est une famille (θ_i) de fonctions lisses sur X telles que :
(i) la famille des supports $\operatorname{supp} \theta_i$ est localement finie ;
(ii) $\theta_i \geq 0$ pour tout i, et $\sum_i \theta_i \equiv 1$.

Notons que la somme dans (ii) est localement finie, grâce à (i).

Théorème 4.2.2. *Pour une variété X, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *chaque composante connexe de X est à base dénombrable ;*

(*ii*) *chaque composante connexe de* X *est dénombrable à l'infini ;*
(*iii*) X *est paracompacte ;*
(*iv*) *pour tout recouvrement ouvert* $(U_i)_{i\in I}$ *de* X*, il existe une partition de l'unité* (θ_i) subordonnée à (U_i)*, i.e. telle que* $\operatorname{supp}\theta_i \subset U_i$ *pour tout* i.

Corollaire 4.2.3. *Si* X *est paracompacte et* $F \subset U \subset X$ *sont respectivement fermés et ouverts dans* X*, alors il existe une* fonction plateau χ pour $F \subset U$*, i.e. une fonction lisse* $\chi \in C^\infty(X)$ *telle que* $0 \le \chi \le 1$, $\operatorname{supp}\chi \subset U$ *et* $\chi = 1$ *au voisinage de* F.

Démonstration. Une fonction plateau χ pour $F \subset U$ est équivalente à une partition de l'unité $(\chi, 1-\chi)$ subordonnée à $(U, X \setminus F)$. □

Preuve du théorème 4.2.2. L'équivalence entre (i) et (ii) est élémentaire (cf. exercice 1.4.25) ; l'équivalence entre (ii) et (iii) résulte du corollaire 4.1.8. Si (iv) est vérifiée, les ouverts $\{\theta_i > 0\}$ forment un raffinement localement fini de (U_i), et X est donc paracompacte.

Supposons enfin que X est paracompacte, et commençons par établir l'existence d'une fonction plateau pour $K \subset U \subset X$ avec K compact et U ouvert. Soit $x \in K$ et $V_x \subset U$ une carte contenant x. On peut alors trouver $f_x \in C_c^\infty(V_x)$ telle que $f_x \ge 0$ et $f_x(x) > 0$ (par exemple en régularisant par convolution la fonction caractéristique d'une petite boule centrée en x). Par compacité de K, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \dots, x_r$ tels que les ouverts $\{f_{x_i} > 0\}$ recouvrent K. La fonction $f := \sum_i f_{x_i}$ est lisse, à support compact dans U, avec $f > 0$ sur un voisinage compact L de K. On peut alors choisir une fonction positive $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = 0$ en 0 et $\varphi = 1$ sur $f(L)$, et on obtient la fonction plateau souhaitée en posant $\chi := \varphi \circ f$.

Considérons maintenant un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, et choisissons un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j\in J}$ de X tels que V_j soit relativement compact et contenu dans $U_{f(j)}$ pour une certaine fonction $f : J \to I$. Le lemme de rétrécissement permet de trouver des compacts $K_j \Subset V_j$ recouvrant encore X, et ce qui précède fournit pour chaque j une fonction plateau $\chi_j \subset C_c^\infty(V_j)$ pour $K_j \subset V_j$. On obtient la partition de l'unité souhaitée en posant

$$\tilde{\chi}_i := \sum_{f(j)=i} \chi_i, \ \ \tilde{\chi} := \sum_i \tilde{\chi}_i \text{ et } \theta_i := \tilde{\chi}_i / \tilde{\chi}.$$

□

4.3 Variétés à base dénombrable

L'existence de fonctions plateau, et plus généralement de partitions de l'unité, est un outil crucial pour construire des fonctions lisses ayant des propriétés locales prescrites. On sera donc amené en pratique à se retreindre aux variétés paracompactes, i.e. dont chaque composante connexe est à base dénombrable. Une telle variété est elle-même à base dénombrable ssi l'ensemble de ses composantes connexes est au plus dénombrable, hypothèse nécessaire à un comportement raisonnable de la théorie de l'intégration sur les variétés.

Pour ces raisons, **nous supposerons dorénavant que toute variété est à base dénombrable, sauf mention explicite du contraire**. Cette convention est à peu près universelle en géométrie différentielle, les variétés à base dénombrable étant exactement celles qui se réalisent comme sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, comme nous le verrons plus loin (théorème 10.2.1).

Exemple 4.3.1. La surface de Prüfer (exercice 2.4.6) est une variété connexe de dimension 2 non-paracompacte. L'introduction des ordinaux permet de définir une variété de dimension 1 non-paracompacte appelée *longue droite*, cf. [Spi, Appendix].

La vérification de la condition de base dénombrable est souvent immédiate (par exemple parce qu'on dispose d'un recouvrement dénombrable par des cartes). Le résultat suivant, qui ne sera pas utilisé dans ce cours, s'avère efficace pour traiter certains cas retors (feuilles d'un feuilletage, revêtement universel).

Théorème 4.3.2 (Poincaré-Volterra)**.** *Soit $f : X' \to X$ une application continue à fibres discrètes entre espaces topologiques séparés avec X' connexe, localement compact, localement connexe et localement à base dénombrable (par exemple une variété topologique). Si X est à base dénombrable, alors X' l'est aussi.*

Démonstration. Il suffit de produire un recouvrement dénombrable de X' par des ouverts à base dénombrable. On commence par observer que si $U \subset X$ est ouvert, les composantes connexes de $U' := f^{-1}(U)$ sont des ouverts disjoints (par locale connexité), de sorte que ceux qui rencontrent un ouvert à base dénombrable donné $\Omega \subset X'$ forment un ensemble au plus dénombrable. On choisit maintenant une base dénombrable (U_n) de la topologie de X, et on dira pour faire bref qu'un ouvert $\Omega \subset X'$ est *distingué* si Ω est une composante connexe relativement compacte et à base dénombrable de l'un des $U'_n = f^{-1}(U_n)$. L'observation précédente montre que chaque ouvert distingué ne rencontre qu'un nombre au plus dénombrable d'ouverts distingués.

Commençons par montrer que tout $x' \in X'$ est contenu dans un ouvert distingué. Par hypothèse, x' admet un voisinage compact K à base dénombrable qui ne rencontre la fibre $f^{-1}(f(x'))$ qu'en x'. Le compact $f(\partial K)$ ne contient pas $f(x')$, qui est donc contenu dans un U_n tel que U'_n ne rencontre pas ∂K. Il en résulte que la composante connexe Ω_0 de x' dans U'_n est contenue dans K, et Ω_0 est donc un ouvert distingué contenant x'. On produit maintenant par récurrence une suite croissante (Ω_n) d'ouverts de X' en définissant Ω_{n+1} comme la réunion des ouverts distingués intersectant Ω_n. Par construction, la réunion $\Omega_\infty \subset X'$ des Ω_n est réunion dénombrable d'ouverts à base dénombrable, donc est à base dénombrable. Puisque X' est connexe, tout point

$x'' \in X'$ peut être joint à x' par une chaîne finie d'ouverts distingués, et il en résulte que $X' = \Omega$ est à base dénombrable. □

Mentionnons pour finir qu'un théorème de Radó garantit que toute surface de Riemann, i.e. toute variété complexe de dimension 1, est automatiquement paracompacte. Comme l'ont montré Calabi et Rosenlicht, une variante de la construction des variétés de Prüfer fournit par contre des variétés complexes non-paracompactes en chaque dimension (complexe) $n \geq 2$.

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1. *On va montrer que toute variété compacte X se plonge dans $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand (cf. théorème 10.2.1 pour une vaste généralisation).*

- (i) *Justifier l'existence d'un nombre fini de cartes $\phi_i : U_i \hookrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ et de compacts $K_i \subset U_i$ recouvrant X.*
- (ii) *On choisit pour chaque i une fonction plateau $\chi_i \in C_c^\infty(U_i)$ pour $K_i \subset U_i$, ce qui permet d'étendre $\chi_i\phi_i$ en une application lisse $\tilde{\phi}_i : X \to \mathbb{R}^{n_i}$. Vérifier que l'application produit $f : X \to \prod_i \mathbb{R}^{n_i+1}$ ayant pour composantes $(\chi_i, \tilde{\phi}_i)$ fournit le plongement recherché.*

Exercice 4.4.2. *Soit $M := [0,1]^{\mathbb{R}}$ l'espace des applications $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, muni de la topologie produit, et notons $1 \in M$ l'application constante égale à 1.*

- (i) *Montrer que $U := M \setminus \{1\}$ est connexe.*
- (ii) *En déduire que l'ouvert U de l'espace compact M n'est pas paracompact.*

Exercice 4.4.3. *Montrer que toute variété (à base dénombrable, comme on le suppose désormais) admet une* fonction d'exhaustion *$f : X \to \mathbb{R}$, i.e. une fonction lisse telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \infty$ (ou encore dont les ensembles de sous-niveau $\{f \leq c\}$ sont tous compacts).*

Exercice 4.4.4. *Montrer que tout fermé d'une variété X est le lieu des zéros d'une fonction lisse.*

Exercice 4.4.5. *Si X est une variété, montrer que pour toute fonction $f \in C_c^0(X)$ continue à support compact, il existe une suite $f_j \in C_c^\infty(X)$, à support dans un compact fixe, telle que $f_i \to f$ uniformément sur X.*

Chapitre 5

Fibrés vectoriels

Dans ce qui suit, X désigne une variété, et on travaille avec des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Définitions

Familles lisses d'espaces vectoriels

De manière informelle, un *fibré vectoriel de rang r sur X* est une famille $(E_x)_{x \in X}$ d'espaces vectoriels telle que, pour tout $x \in X$ proche d'un point donné, on puisse trouver une base $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ de E_x dépendant de façon C^∞ de x.

Pour définir ceci de façon rigoureuse, une première approche consiste à imiter la définition des variétés. On appelle *ouvert trivialisant* (U, ϕ) d'une famille $(E_x)_{x \in X}$ d'espaces vectoriels la donnée d'un ouvert $U \subset X$ et d'une famille d'isomorphismes

$$\{\phi(x) : E_x \simeq \mathbb{K}^r\}_{x \in U},$$

qu'on peut voir de façon équivalente comme la donnée d'une base $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ pour chaque $x \in U$. Un *recouvrement trivialisant* de E est un recouvrement de X par des ouverts trivialisants (U_i, ϕ_i) deux à deux compatibles, au sens où les applications de transition $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ définies par

$$g_{ij}(x) := \phi_i(x)\phi_j(x)^{-1} : \mathbb{K}^r \simeq \mathbb{K}^r$$

sont lisses pour tous i, j. Notons au passage qu'elles satisfont la relation de *cocycle*

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^r} \tag{5.1.1}$$

pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Deux recouvrements trivialisants (U_i, ϕ_i) et (V_j, ψ_j) sont *équivalents* si leur réunion $(U_i \cap V_j, \phi_i, \psi_j)$ reste un recouvrement trivialisant, et on appelle *structure de fibré vectoriel* sur la famille (E_x) une classe d'équivalence de recouvrements trivialisants.

Exemple 5.1.1. Pour tout espace vectoriel V, la famille constante égale à V est un fibré vectoriel de rang r sur X, appelé *fibré trivial sur X de fibre V*.

Un fibré vectoriel peut être décrit de façon plus compacte en introduisant l'ensemble $E := \coprod_{x \in X} E_x$, muni de la projection naturelle $\pi : E \to X$. D'après l'exercice 2.3.1, un recouvrement trivialisant (U_i, ϕ_i) pour (E_x) munit E d'une unique structure de variété telle que chaque bijection

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) = \bigcup_{x \in U_i} E_x \to U_i \times \mathbb{K}^r$$

induite par les $\phi_i(x) : E_x \simeq \mathbb{K}^r$ soit un difféomorphisme. Cette structure de variété ne dépend que de la classe d'équivalence de recouvrements trivialisants, et nous mène à la

Définition 5.1.2. Un *fibré vectoriel de rang* r sur une variété X consiste en la donnée d'une variété E, d'une application lisse $\pi : E \to X$ et d'une structure de K-espace vectoriel sur chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$, le tout étant *localement trivial* au sens où, pour tout point de X, il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{K}^r \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où ϕ est un difféomorphisme qui induit un isomorphisme linéaire $E_x \simeq \{x\} \times \mathbb{K}^r$ sur chaque fibre.

On parlera de *fibré vectoriel réel* ou *complexe* pour distinguer entre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La condition de trivialité est locale sur la base X, et elle entraîne en particulier que π est une submersion (cf. théorème 3.3.2). On appelle la variété E réunion des fibres E_x l'*espace total du fibré*, mais on utilisera souvent E pour résumer l'ensemble de la donnée du fibré vectoriel.

Exemple 5.1.3. Un espace vectoriel V de dimension r peut être vu comme un fibré vectoriel de rang r sur un point $X = \{x\}$.

Exemple 5.1.4. L'espace total du fibré trivial sur X de fibre V est égal à $X \times V$.

Remarque 5.1.5. Comme expliqué ci-dessus, la donnée d'un recouvrement trivialisant (U_i, ϕ_i) pour un fibré vectoriel E donne lieu à des applications de transition lisses $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ satisfaisant la relation de cocycle (5.1.1). Inversement, la donnée d'un tel cocycle (g_{ij}) fournit une donnée de recollement des variétés $U_i \times \mathbb{K}^r$, et produit donc un fibré vectoriel. On prendra cependant garde au fait que les deux opérations ne sont pas inverses l'une de l'autre, le fibré vectoriel recollé étant seulement isomorphe (non canoniquement) au fibré vectoriel de départ E. Ceci est clairement illustré par le cas où X est un point : un fibré vectoriel de rang r sur X est alors un espace vectoriel de rang r, alors que le recollement ne fournit que $\mathbb{K}^r$.

Tirés-en-arrière, sections, morphismes

Si E est un fibré vectoriel de rang r sur X et $f : Y \to X$ est une application lisse, le *tiré-en-arrière* f^*E est le fibré vectoriel de rang r sur Y ayant pour fibres la famille reparamétrée $(f^*E)_y := E_{f(y)}$, et pour recouvrements trivialisants (la classe d'équivalence de) ceux formés des familles

$$\left\{(f^*E)_y = E_{f(y)} \simeq \mathbb{K}^r\right\}_{y \in f^{-1}(U_i)}$$

induites par les recouvrement trivialisants (U_i, ϕ_i) pour E. On notera que le coycle de f^*E correspondant est simplement la composition de celui de E par f.

Exemple 5.1.6. On a $f^*(X \times V) = Y \times V$.

Exercice 5.1.7. *Si $i : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'une sous-variété, i^*E coïncide avec $E|_Y := \pi^{-1}(Y)$.*

Une *section* s d'un fibré vectoriel E est une application lisse $s : X \to E$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$, i.e. $s(x) \in E_x$ pour tout $x \in X$. Les sections de E forment un K-espace vectoriel $\Gamma(X, E)$ (de dimension infinie dès que $\dim X > 0$). Si $E = X \times V$ est trivial, toute section est de la forme

$$s(x) = (x, f(x)) \in X \times V$$

pour une application lisse $f : X \to V$, et s induit donc un difféomorphisme de X sur le graphe de f. Plus généralement :

Exercice 5.1.8. *Toute section définit un plongement fermé de X dans E.*

En particulier, la *section nulle* de E définit un difféomorphisme de X sur la sous-variété de E obtenue comme réunion des origines des E_x.

Exercice 5.1.9. *En terme du cocycle (g_{ij}) associé à un recouvrement trivialisant (U_i, ϕ_i) pour E, une section s de E équivaut à une collection d'applications lisses $s_i : U_i \to \mathbb{K}^r$ telles que $s_i = g_{ij} s_j$ pour tous i, j.*

Si E et F sont des fibrés vectoriels sur X, un *morphisme* $\alpha : E \to F$ est défini comme un application lisse qui induit pour chaque $x \in X$ une application linéaire $\alpha_x : E_x \to F_x$.

Exemple 5.1.10. Une section de E est équivalente à la donnée d'un morphisme de fibrés $X \times \mathbb{K} \to E$.

Exercice 5.1.11. *Un morphisme $\alpha : E \to F$ est un isomorphisme ssi $\alpha_x : E_x \to F_x$ est inversible pour tout x.*

Il semble bien sûr naturel d'autoriser des morphismes entre fibrés vectoriels définis sur des bases distinctes, mais la notion de tiré-en-arrière rend cette généralisation inutile :

Exercice 5.1.12. *Si $E \to X$ et $F \to Y$ sont deux fibrés vectoriels sur des variétés X et Y, la donnée d'un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

où α, f sont lisses et la restriction $\alpha_x : E_x \to F_{f(x)}$ est linéaire pour tout $x \in X$ est équivalente à la donnée d'un morphisme $\beta : E \to f^*F$ de fibrés vectoriels sur X.

5.2 Suites exactes de fibrés

Rappels d'algèbre linéaire

Le dual $V^\star$ d'un espace vectoriel V est l'espace des formes linéaires $V \to \mathbb{K}$. Toute application linéaire $\alpha : V \to W$ donne lieu à une application duale $\alpha^\star : W^\star \to V^\star$, qui est injective ssi α est surjective, et vice-versa (on rappelle que V est supposé de dimension finie). Le bidual $V^{\star\star}$ vient avec une injection canonique $V \to V^{\star\star}$, qui est un isomorphisme puisque V est de dimension finie.

Un sous-espace $S \subset V$ d'un espace vectoriel donne lieu à un *espace quotient* $Q := V/S$, muni d'une application linéaire surjective $\pi : V \to Q$.

Exercice 5.2.1. *Montrer que l'application linéaire $\pi : V \to Q := V/S$ est caractérisée à isomorphisme unique près par la* propriété universelle *suivante : toute application linéaire $\alpha : V \to W$ nulle sur S s'écrit $\alpha = \bar{\alpha} \circ \pi$ pour une unique application linéaire $\bar{\alpha} : Q \to W$.*

En particulier, l'injection duale $Q^\star \to V^\star$ identifie $Q^\star$ avec le sous-espace $S^\perp \subset V^\star$ des formes linéaires $V \to K$ s'annulant sur S, auquel on peut penser comme l'espace des «équations» de S.

Exemple 5.2.2. Toute application linéaire $\alpha : V \to W$ induit un isomorphisme $V/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Im}\alpha$.

Une suite d'applications linéaires

$$\dots \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} V_i \xrightarrow{\alpha_i} V_{i+1} \longrightarrow \dots$$

est *exacte* si $\operatorname{Im}\alpha_{i-1} = \operatorname{Ker}\alpha_i$ pour tout i. En particulier, un diagramme d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \longrightarrow 0$$

est une *suite exacte courte* si α est injective, β est surjective, et $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Si $S \subset V$ est un sous-espace et $Q = V/S$, alors $0 \to S \to V \to Q \to 0$ est exacte, et toute suite exacte courte est isomorphe à une suite de ce type.

Sous-fibrés et quotients

Définition 5.2.3. Un *sous-fibré vectoriel* $S \subset E$ d'un fibré vectoriel E sur X est une famille de sous-espaces vectoriels $S_x \subset E_x$ telle qu'il existe un recouvrement trivialisant (U_i, ϕ_i) pour E dans lequel chaque $\phi_i(x) : E_x \simeq \mathbb{K}^r$ envoie S_x sur un sous-espace fixe de $\mathbb{K}^r$.

De façon équivalente, ceci signifie qu'on peut trouver une base locale lisse $(e_1(x), \ldots, e_r(x))$ de E_x au voisinage de tout point de X telle que $(e_1(x), \ldots, e_p(x))$ soit une base de F_x.

La famille (S_x) hérite d'une structure de fibré vectoriel telle que l'inclusion $S \subset E$ soit un morphisme injectif de fibrés, et la famille des quotients E_x/S_x définit de même un fibré vectoriel E/S avec un morphisme surjectif $\pi : E \to E/S$, caractérisé à isomorphisme unique près par une propriété universelle analogue à celle ci-dessus.

Réciproquement, on a :

Proposition 5.2.4. *Si $\alpha : E \to F$ est un morphisme injectif (resp. surjectif) de fibrés vectoriels, la famille des images $\operatorname{Im}\alpha_x$ (resp. des noyaux $\operatorname{Ker}\alpha_x$) définit un sous-fibré vectoriel $\operatorname{Im}\alpha \subset F$ (resp. $\operatorname{Ker}\alpha \subset E$). De plus, α induit un isomorphisme $E \simeq \operatorname{Im}\alpha$ (resp. $E/\operatorname{Ker}\alpha \simeq F$).*

Plus généralement, les images et noyaux d'un morphisme α sont des sous-fibrés vectoriels ssi α est de rang constant, cf. exercice 5.4.1.

Démonstration. Le résultat étant local sur X, on peut supposer que $E = X \times V$ et $F = X \times W$ sont triviaux, de sorte que α correspond à une famille lisse d'applications linéaires $\alpha_x : V \to W$ entre deux espaces vectoriels fixés. On suppose pour commencer que α_x est injectif pour tout x. Etant donné $x_0 \in X$, il s'agit de construire une famille lisse d'isomorphismes $\phi_x : W \simeq W'$ sur un voisinage $U \subset X$ de x_0 envoyant $\operatorname{Im}\alpha_x$ sur un sous-espace fixe de W'. On choisit pour ce faire un supplémentaire $S \subset W$ de $\operatorname{Im}\alpha_{x_0}$, et considère la famille lisse d'application linéaires

$$\psi_x : W' := V \oplus S \to W$$

définie par $\psi_x(v, s) = \alpha_x(V) + s$. Puisque α_{x_0} est injective et S est supplémentaire de $\operatorname{Im}\alpha_{x_0}$, ψ_x est un isomorphisme $x = x_0$; c'est donc aussi le cas pour x

proche de x_0, et la famille des inverses $\phi_x : W \to W'$ envoie $\operatorname{Im} \alpha_x$ sur le sous-espace fixe $V \oplus \{0\} \subset W'$.

Puisque $\operatorname{Im} \alpha \subset F$ est une sous-variété, α est lisse en tant qu'application $E \to \operatorname{Im} \alpha$, et donc un isomorphisme (exercice 5.1.11).

Si les α_x sont maintenant surjectifs, on choisit un supplémentaire $S \subset V$ de $\operatorname{Ker} \alpha_{x_0}$, et on considère la famille lisse d'applications linéaires

$$\phi_x = (\pi, \alpha_x) : V \to V' := (V/S) \oplus W.$$

C'est un isomorphisme pour $x = x_0$, donc aussi pour x proche de x_0, et ϕ_x envoie $\operatorname{Ker} \alpha_x$ sur le sous-espace fixe $V/S \oplus \{0\}$, ce qui montre que la famille $(\operatorname{Ker} \alpha_x)$ est un sous-fibré de $X \times V$. $\square$

Corollaire 5.2.5. *Toute suite exacte courte* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *de fibrés vectoriels sur* X *est isomorphe à* $0 \to S \to E \to E/S \to 0$ *avec* S *un sous-fibré de* E.

5.3 Fibrés associés

Une «construction tensorielle» associe à un espace vectoriel V un autre espace vectoriel, qui peut être par exemple son dual $V^\star$, la somme directe $V^{\oplus p}$, l'espace des formes p-linéaires sur V, etc... Comme on va le voir, ces constructions peuvent se réaliser en famille, et s'étendent donc au cas des fibrés vectoriels.

Afin de formaliser ceci, on notera VIso^r la *catégorie* dont les objets sont les K-espaces vectoriels V de dimension r et les flèches sont les isomorphismes $\phi : V \simeq V'$ d'espaces vectoriels. On définit alors une construction tensorielle comme un *foncteur* $F : \mathrm{VIso}^r \to \mathrm{VIso}^p$, qui associe donc à tout espace vectoriel V de dimension r un espace vectoriel $F(V)$ de dimension p, et à tout isomorphisme $\phi : V \simeq V'$ un isomorphisme $F(\phi) : F(V) \simeq F(V')$, de telle sorte que

(i) $F(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{F(V)}$;

(ii) $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$.

En particulier, F induit pour tout V un morphisme de groupes

$$F_V : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(F(V)),$$

et on dira que F est *lisse* si F_V est lisse pour tout V.

Remarque 5.3.1. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ est un *groupe de Lie*, i.e. un groupe muni d'une structure de variété pour laquelle le produit et l'inverse sont lisses, et on peut montrer que tout morphisme entre groupes de Lie est lisse dès qu'il est continu (ou même mesurable). Le choix d'une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel permet cependant de construire des fonctions additives $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne sont pas des homothéties, et donc des morphismes discontinus de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ dans lui-même.

Remarque 5.3.2. La donnée d'un foncteur $F : \mathrm{VIso}^r \to \mathrm{VIso}^p$ comme ci-dessus est en fait équivalente (à isomorphisme canonique près) à celle d'un morphisme de groupes $\rho : \mathrm{GL}(r, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(W)$ où W est espace vectoriel de dimension p. En effet, pour tout espace vectoriel V de dimension r, l'ensemble $\mathrm{Iso}(V, \mathbb{K}^r)$ des isomorphismes $\phi : V \simeq \mathbb{K}^r$ admet une action transitive sans point fixe de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ par composition à gauche, et on peut alors définir $F_\rho(V)$ comme le quotient du produit $\mathrm{Iso}(V, \mathbb{K}^r) \times W$ par l'action diagonale de $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$, muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel héritée de celle de W.

Donnons-nous maintenant une variété X, et notons VIso^r_X la catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels E de rang r sur X et les flèches sont les isomorphismes de fibrés. Si $F : \mathrm{VIso}^r \to \mathrm{VIso}^p$ est un foncteur lisse et (U_i, ϕ_i) un recouvrement trivialisant d'un fibré E, les trivialisations induites

$$\{F(\phi_i(x)) : F(E_x) \simeq F(\mathbb{K}^r)\}_{x \in U_i}$$

sont deux à deux compatibles par lissité de F, et définissent donc une structure canonique de fibré vectoriel $F(E)$ sur la famille des $F(E_x)$. On en déduit aisément le résultat suivant :

Proposition 5.3.3. *Un foncteur lisse $F : \mathrm{VIso}^r \to \mathrm{VIso}^p$ s'étend de façon unique (à isomorphisme unique près) en un foncteur $F : \mathrm{VIso}^r_X \to \mathrm{VIso}^p_X$ pour chaque variété X, commutant aux tiré-en-arrière au sens où $F(f^*E) = f^*F(E)$ pour toute application lisse $f : Y \to X$.*

La construction précédente s'étend de façon immédiate au cas d'un «multifoncteur» $F(V_1, \dots, V_k)$, et fournit en particulier les objets suivants.

Exemple 5.3.4. Somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ de fibrés vectoriels E_i sur X.

Exemple 5.3.5. Fibré dual $E^\star$ d'un fibré E, et plus généralement fibré des applications linéaires $\mathrm{Hom}(E, F)$ associé à deux fibrés E, F sur X, de fibres $\mathrm{Hom}(E, F)_x = \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$. Notons que les sections globales

$$\Gamma\left(X, \mathrm{Hom}(E, F)\right)$$

sont précisément les morphismes de fibrés $E \to F$.

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. *Si $\alpha : E \to F$ est un morphisme de fibrés vectoriels sur une variété X, montrer que la famille des noyaux $\mathrm{Ker}\,\alpha_x$ et des images $\mathrm{Im}\,\alpha_x$ forment des sous-fibrés vectoriels de E et F ssi le rang des applications linéaires $\alpha_x : E_x \to F_x$ est localement constant.*

Exercice 5.4.2. *On considère une suite exacte de fibrés vectoriels*

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

sur une variété X.

(i) *En utilisant une partition de l'unité, montrer que la suite induite*

$$0 \to \Gamma(X, E') \to \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E'') \to 0$$

est exacte.

(ii) *Montrer que toute suite exacte de fibrés est* scindée*, i.e. qu'elle correspond à un isomorphisme $E \simeq E' \oplus E''$.*

Exercice 5.4.3. *Soit E une fibré vectoriel sur une variété X, et Y une sous-variété.*

(i) Si Y est fermée, montrer en utilisant une partition de l'unité que l'application de restriction $\Gamma(X, E) \to \Gamma(Y, E|_Y)$ est surjective.

(ii) Dans le cas général, montrer que toute section dans $\Gamma(Y, E|_Y)$ s'étend en une section dans $\Gamma(U, E|_U)$ pour un voisinage ouvert $U \subset X$ de Y. Peut-on prendre $U = X$ en général ?

Exercice 5.4.4. *On appelle* métrique euclidienne *sur un fibré vectoriel réel $E \to X$ la donnée d'une famille lisse de produits scalaires (définis positifs) $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur les fibres E_x.*

(i) *Préciser la notion de famille lisse utilisée ici.*

(ii) *En utilisant une partition de l'unité, montrer que tout fibré vectoriel admet une métrique euclidienne.*

Exercice 5.4.5. *Soit E un fibré vectoriel sur X. Montrer que pour tout ouvert $U \Subset X$ relativement compact, on peut trouver un entier N et un morphisme $X \times \mathbb{K}^N \to E$ qui soit surjectif en restriction à U.*

Cf. exercice 10.4.2 pour un énoncé beaucoup plus fort.

Exercice 5.4.6 (Fibré tautologique d'un espace projectif)**.** *Chaque point $x \in \mathbb{P}(V)$ correspond par définition à une droites L_x de V.*

(i) *Montrer que (L_x) définit un sous-fibré $L \subset \mathbb{P}(V) \times V$ de rang 1, appelé* fibré en droites tautologique.

(ii) *Montrer que le ruban de Möbius muni de l'application $M \to S^1$ est isomorphe à l'espace total du fibré tautologique sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.*

Exercice 5.4.7 (Fibrés universels sur les grassmanniennes)**.** *On obtient de même une famille tautologique de sous-espaces (U_x) paramétrés par les points de la grassmannienne $x \in \mathrm{Gr}(r, V)$.*

(i) *Montrer qu'on définit ainsi un sous-fibré vectoriel U, appelé* universel*, du fibré trivial $X \times V$.*

(*ii*) *Si* E *est un sous-fibré de rang* r *du fibré trivial* $X \times V$ *sur une variété* X*, montrer que* $f(x) := [E_x] \in \mathrm{Gr}(r, V)$ *définit une application lisse* $f : X \to \mathrm{Gr}(r, V)$ *avec un isomorphisme* $E \simeq f^*U$*.*

Exercice 5.4.8 (Le revêtement d'orientation d'un fibré en droites)**.** *Soit* L *un fibré en droites réel sur une variété* X*, i.e. un* $\mathbb{R}$*-fibré vectoriel de rang* 1*. On note* $Z \subset L$ *la section nulle, et* $\mathrm{Or}(L)$ *le quotient de* $L \setminus Z$ *sous l'action de* $\mathbb{R}_+^\times$*.*

(*i*) *Montrer que* $\mathbb{R}_+^\times$ *agit proprement et sans point fixe sur* $L \setminus Z$*, et que la projection* $L \to X$ *induit une application continue surjective* $\pi : \mathrm{Or}(L) \to X$*.*

(*ii*) *Montrer que le groupe à deux éléments* $\mathrm{Or}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_+^\times \simeq \{\pm 1\}$ *agit librement sur* $\mathrm{Or}(L)$*, et que* $\pi : \mathrm{Or}(L) \to X$ *induit un homéomorphisme* $\mathrm{Or}(L)/\mathrm{Or}(\mathbb{R}) \simeq X$*.*

(*iii*) *Montrer que chaque trivialisation* $L|_U \simeq U \times \mathbb{R}$ *induit un homéomorphisme* $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathrm{Or}(\mathbb{R})$ *dans lequel* π *correspond à la première projection, et décrire les applications de transition.*

(*iv*) *Déduire de* (*iii*) *que* $\mathrm{Or}(L)$ *est muni d'une structure de variété telle que chaque* $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathrm{Or}(\mathbb{R})$ *soit un difféomorphisme. Vérifier qu'il s'agit aussi de l'unique structure de variété qui fasse de*

$$\pi : \mathrm{Or}(L) \to X$$

un difféomorphisme local. On l'appelle revêtement d'orientation de L*, cf.* §*7.3.*

(*v*) *Montrer que* $\mathrm{Or}(\mathbb{R})$ *agit par difféomorphismes sur* $\mathrm{Or}(L)$*, et que* π *induit un difféomorphisme* $\mathrm{Or}(L)/\mathrm{Or}(\mathbb{R}) \simeq X$*.*

(*vi*) *En utilisant une métrique euclidienne sur* L *(cf. exercice 5.4.4), montrer que* L *est trivial ssi* $\pi : \mathrm{Or}(L) \to X$ *admet une section, i.e. une application lisse* $\sigma : X \to \mathrm{Or}(L)$ *telle que* $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$*.*

Exercice 5.4.9. *On va montrer que tout fibré en droites réel* L *sur* $\mathbb{R}^n$ *est trivial. D'après l'exercice 5.4.8, il suffit de construire un section du revêtement d'orientation* $\pi : \mathrm{Or}(L) \to \mathbb{R}^n$*. Puisque* L *est trivial au voisinage de* 0*, on peut fixer une section* σ_0 *de* π *sur une petite boule ouverte* B_0 *centrée en* 0*.*

(*i*) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*, montrer qu'on peut trouver des boules ouvertes* $B_1, \ldots, B_r$ *telles que*

$$[0, x] \subset \Omega := B_0 \cup \cdots \cup B_r,$$

$B_{i-1} \cap B_i \neq \emptyset$*, et* $L|_{B_i}$ *soit trivial, pour tout* $i \geq 1$*.*

(*i*) *Montrer qu'il existe une unique section* σ *de* π *au dessus de* Ω *qui coïncide avec* σ_0 *sur* B_0*.*

(*iii*) *Conclure.*

Plus généralement, on montre que tout fibré vectoriel (réel ou complexe) sur $\mathbb{R}^n$ (et même sur toute variété contractile) est trivial.

Chapitre 6

Fibrés tangents et champs de vecteurs

6.1 Fibrés tangents et fibrés normaux

Fibrés tangents

Le *fibré tangent* TX d'une variété X de dimension n est le fibré vectoriel réel de rang n sur X ayant pour fibres les espaces tangents T_xX, et pour recouvrements trivialisants (la classe d'équivalence de) ceux induits par les différentielles

$$\{d_x\phi_i : T_xX \simeq \mathbb{R}^n\}_{x\in U_i}$$

des cartes de tout atlas (U_i, ϕ_i) de X.

Une section $v \in \Gamma(X, TX)$ du fibré tangent, qui associe donc de façon lisse à tout point $x \in X$ un vecteur tangent $v(x) \in T_xX$, est appelée *champ de vecteurs* sur X. Il peut aussi être vu comme un opérateur différentiel linéaire (d'ordre un), qui associe à $f \in C^\infty(X)$ la *dérivée directionnelle* (aussi appelée *dérivée de Lie*, *opérateur de transport*, etc...) $v \cdot f$ définie par

$$(v \cdot f)(x) := d_xf(v(x)).$$

La donnée d'une carte $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ sur X, correspondant à des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sur $U \subset X$, induit une famille de champs de vecteurs sur U notés

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{6.1.1}$$

fournissant une base de $T_xU = T_xX$ pour tout $x \in U$. Un champ de vecteurs v sur U s'écrit donc

$$v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

pour une unique famille de fonctions $a_i \in C^\infty(U)$, et on a alors pour toute $f \in C^\infty(U)$
$$v \cdot f = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$
En particulier, $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, ce qui explique le choix de notation !

Exemple 6.1.1. L'espace tangent TV d'un espace vectoriel V est canoniquement isomorphe au fibré trivial $V \times V$ via les différentielles des translations.

Si $f : X \to Y$ est maintenant une application lisse entre deux variétés, les différentielles $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ définissent un morphisme
$$df : TX \to f^* TY$$
de fibrés vectoriels sur X. On prendra garde au fait que l'image par df d'un champ de vecteurs sur X vit dans $\Gamma(X, f^*TY)$, et n'est donc *pas* un champ de vecteur sur Y.

Une application lisse $f : X \to Y$ est une submersion ssi $df : TX \to f^*TY$ est un morphisme surjectif. D'après la proposition 5.2.4, le noyau $T(X/Y) := \operatorname{Ker} df$ est alors un sous-fibré de TX, appelé *fibré tangent relatif*, et qui s'inscrit dans une suite exacte
$$0 \to T(X/Y) \to TX \to f^*TY \to 0.$$
D'après le corollaire 3.2.5, la fibre $f^{-1}(f(x))$ passant par $x \in X$ est une sous-variété de X, d'espace tangent en x donné par le noyau de $d_x f$, et $T(X/Y)$ est donc le sous-fibré de TX formé des directions tangentes aux fibres de f.

Fibrés normaux

Considérons maintenant une immersion $f : Z \to X$. D'après la proposition 5.2.4, l'image du morphisme injectif de fibrés $df : TZ \to f^*TX$ est un sous-fibré ; on peut donc introduire le fibré quotient
$$N(Z/X) := f^*TX / \operatorname{Im} df,$$
appelé *fibré normal* de l'immersion, qui s'inscrit par définition dans une suite exacte
$$0 \to TZ \to f^*TX \to N(Z/X) \to 0$$
de fibrés vectoriels sur Z. Ce concept est principalement utilisé lorsque Z est une sous-variété de X, avec $f : Z \to X$ l'inclusion. Dans ce cas,
$$N(Z/X) = TX|_Z / TZ,$$
et le rang de $N(Z/X)$ coïncide avec la codimension de Z dans X. Le choix d'une métrique riemannienne sur X induit un isomorphisme
$$N(Z/X) \simeq TZ^\perp \subset TX|_Z$$

avec le sous-fibré des directions orthogonales à Z, ce qui explique la terminologie.

6.2 Flot d'un champ de vecteurs

Soit $v \in \Gamma(X, TX)$ un champ de vecteurs sur X. Une *courbe intégrale* de v est une application lisse $\gamma : I \to X$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = v(\gamma(t)).$$

Si on écrit

$$v(x) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dans des coordonnées locales centrées en $\gamma(t_0)$, l'équation différentielle équivaut à

$$\dot{\gamma}_i(t) = a_i(\gamma(t)), \ i = 1, \dots, n$$

pour t proche de t_0, et le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne donc facilement pour chaque $x \in X$ l'existence d'une unique courbe intégrale maximale $\gamma_x : I_x \to X$ de v, définie sur un intervalle ouvert $0 \in I_x \subset \mathbb{R}$ et telle que $\gamma_x(0) = x$.

On dit que v est *complet* si on a $I_x = \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$.

Définition 6.2.1. Soit $\phi : \Omega \to X$ une application lisse définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$, qu'on voit comme une famille d'applications

$$\phi_t : \Omega_t := \{x \in X \mid (t, x) \in \Omega\} \to X.$$

On dit que ϕ est un *flot* si elle satisfait les conditions suivantes :

(i) pour chaque $x \in X$, $\Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ est un intervalle (ouvert) contenant 0 ;

(ii) $\phi_0 = \mathrm{id}_X$ sur $\Omega_0 = X$;

(iii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a $\Omega_t \cap \Omega_{s+t} \subset \phi_t^{-1}(\Omega_s)$ et $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ sur cet ouvert.

Les conditions (ii) et (iii) impliquent que ϕ_t est un difféomorphisme de Ω_t sur Ω_{-t}, d'inverse ϕ_{-t}.

Exemple 6.2.2. Un flot défini sur $\mathbb{R} \times X$ est équivalent à la donnée d'un *sous-groupe à un paramètre de difféomorphismes de* X, i.e. un morphisme de groupe $(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{Diff}(X)$ tel que l'application d'action $\mathbb{R} \times X \to X$ soit lisse.

Théorème 6.2.3. *Soit v un champ de vecteurs sur X, et pour chaque $x \in X$ $\gamma_x : I_x \to X$ la courbe intégrale maximale de v passant par x en 0. Alors*

$$\Omega := \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X$$

est ouvert, et l'application $\phi : \Omega \to X$ définie par $\phi(t,x) = \gamma_x(t)$ est un flot.

Réciproquement, tout flot $\phi : \Omega \to X$ est la restriction du flot du champ de vecteurs v défini par

$$v(x) := \frac{\partial}{\partial t}_{t=0} \phi(t,x),$$

appelé générateur du flot*. En particulier, les sous-groupes à un paramètre de* $\mathrm{Diff}(X)$ *sont en bijection avec les champs de vecteurs complets sur X.*

Démonstration. Le fait que Ω est ouvert et que ϕ est lisse sur Ω découlent du théorème de dépendance C^∞ des solutions d'une équation différentielle en la solution initiale. Les conditions (i) et (ii) de la définition 6.2.1 sont clairement satisfaites. Si $(t,x) \in \mathbb{R} \times X$ satisfait $t \in I_x \Leftrightarrow x \in \Omega_t$, la courbe translatée $s \mapsto \gamma_x(s+t)$, définie pour $s+t \in I_x \Leftrightarrow x \in \Omega_{s+t}$, est une courbe intégrale de v passant par $\gamma_x(t) = \phi_t(x)$ pour $s = 0$. On a donc $I_x - t \subset I_{\phi_t(x)}$, i.e. $\Omega_t \cap \Omega_{s+t} \subset (\phi_t)^{-1}(\Omega_s)$, et $\gamma_x(s+t) = \gamma_{\gamma_t(x)}(s)$, i.e. $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$ sur $\Omega_t \cap \Omega_{s+t}$.

Réciproquement, si ϕ est un flot et $x \in \Omega_t$, alors $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ fait sens pour tout s proche de 0, et on a donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x) = \frac{\partial}{\partial s}_{s=0}\phi_s(\phi_t(x)) = v(\phi_t(x))$$

pour tout $t \in \Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$, qui est par hypothèse un intervalle ouvert contenant 0. Il en résulte que $t \in \Omega \cap (\mathbb{R} \times \{x\}) \subset I_x$ et $\phi_t(x) = \gamma_x(t) = \phi^v_t(x)$. □

Exemple 6.2.4. Le groupe à un paramètre de translations $\phi_t(x) = x + t$ correspond au champ de vecteurs $v = 1$, qui est complet sur $\mathbb{R}$, mais par en restriction à $]0,1[$.

Théorème 6.2.5 (Sortie de tout compact)**.** *Soit $\gamma_x : I_x \to X$ une courbe intégrale maximale d'un champ de vecteurs v. Si* $\sup I_x < +\infty$ *(resp* $\inf I_x > -\infty$*), la restriction de γ_x à $I_x \cap \mathbb{R}_+$ (resp $I_x \cap \mathbb{R}_-$) est propre.*

Démonstration. Pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que ϕ_ε soit définie sur K. Pour tout $t \in I_x$ tel que $\gamma_x(t) = \phi_t(x) \in K$,

$$\gamma_x(t+\varepsilon) = \phi_{t+\varepsilon}(x) = \phi_\varepsilon(\phi_t(x))$$

est donc bien définie, d'où $t + \varepsilon < \sup I_x$, et $\gamma_x^{-1}(\mathbb{K}) \cap \mathbb{R}_+$ est donc compact si $\sup I_x < +\infty$. Le cas $\inf I_x > -\infty$ en découle, en remplaçant v par $-v$. □

Corollaire 6.2.6. *Si X est compacte, tout champ de vecteurs est complet.*

6.3 Exercices

Exercice 6.3.1. *Toute suite d'immersions* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *donne lieu à une suite exacte*

$$0 \to N(X/Y) \to N(X/Z) \to f^*N(Y/Z) \to 0.$$

Exercice 6.3.2. *Soit* $\pi : E \to X$ *un fibré vectoriel.*

(*i*) *Montrer que le fibré tangent relatif* $T(E/X)$ *est canoniquement isomorphe à* π^*E*, et en déduire une suite exacte de fibrés vectoriels*

$$0 \longrightarrow \pi^*E \longrightarrow TE \xrightarrow{d\pi} \pi^*TX \longrightarrow 0\ .$$

(*ii*) *Montrer que le fibré normal du plongement* $X \hookrightarrow E$ *comme section nulle est canoniquement isomorphe à* E*.*

Exercice 6.3.3. *Montrer que le fibré normal du plongement diagonal* $X \to X \times X$ *est canoniquement isomorphe au fibré tangent de* X*.*

Exercice 6.3.4. *Soit* $\pi : X \to Y$ *une submersion et* $Z \subset Y$ *une sous-variété, de sorte que* $\pi^{-1}(Z)$ *est une sous-variété de* X *(exercice 3.3.4). Montrer que* $d\pi : TX \to \pi^*TY$ *induit un isomorphisme canonique*

$$N\left(\pi^{-1}(Z)/X\right) \simeq \pi^*N(Z/Y).$$

Exercice 6.3.5 (Fibrés tangent des grassmanniennes)**.** *Montrer que les isomorphismes canoniques* $T_U \operatorname{Gr}(r,V) \simeq \operatorname{Hom}(U, V/U)$ *de l'exercice 2.4.5 induisent un isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$T \operatorname{Gr}(r,V) \simeq \operatorname{Hom}(U,Q),$$

où U *désigne le fibré universel sur* $\operatorname{Gr}(r,V)$ *et* Q *le quotient par* U *du fibré trivial* $\operatorname{Gr}(r,V) \times V$*.*

Exercice 6.3.6. *Soit* X *une variété et* $H \subset X$ *une hypersurface, i.e. une sous-variété fermée de dimension* 1*. On va montrer que son fibré normal* $N := N(H/X)$*, qui est un fibré en droites réel sur* H*, s'étend de façon naturelle en un fibré en droites réel* L *sur* X*, trivial sur* $X \setminus H$*.*

(*i*) *On appelle* équation *de* H *sur un ouvert* $U \subset X$ *une fonction* $f \in C^\infty(U)$ *telle que* $H \cap U = \{f = 0\}$ *et* $d_x f \neq 0$ *pour* $x \in H \cap U$*. Montrer que la différentielle de* f *induit une trivialisation* $\phi_f : N|_U \simeq U \times \mathbb{R}$*.*

(*ii*) *Si* f *et* g *sont deux équations de* H *sur un même ouvert* U*, montrer que* $f = ug$ *avec* $u \in C^\infty(U)$ *partout non-nulle, et que l'isomorphisme de transition* $\phi_f \circ \phi_g^{-1} : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ *est donné par multiplication par* u*.*

(*iii*) *On définit une famille de droites réelles* $L = (L_x)_{x \in X}$ *en posant* $L_x = N_x$ *pour* $x \in H$ *et* $L_x = \mathbb{R}$ *pour* $x \in X \setminus H$. *A toute équation* f *de* H *sur un ouvert* U, *on associe un ouvert trivialisant* (U, ϕ) *pour* L *en définissant* $\phi_x : L_x \simeq \mathbb{R}$ *par*

$$\phi_x := (\phi_f)_x : N_x \to \mathbb{R}$$

pour $x \in H$ *et* $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donné par multiplication par* $f(x)$ *pour* $x \notin H$. *Montrer que ceci munit* L *d'une structure de fibré en droites, trivial sur* $X \setminus H$ *et isomorphe à* N *en restriction à* H.

Exercice 6.3.7. *Montrer qu'un champ de vecteurs* v *sur une variété* X *est complet dès qu'il existe* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* ϕ_t^v *soit définie sur* X *tout entier.*

Exercice 6.3.8. *Montrer que chaque courbe intégrale maximale* $\gamma_x : I_x \to X$ *d'un champ de vecteurs* v *tombe dans l'un des trois cas suivants :*

(*i*) $I_x = \mathbb{R}$, γ_x *est constante et* $v(x) = 0$ *;*

(*ii*) $I_x = \mathbb{R}$, γ_x *est périodique et elle induit un plongement* $S^1 \hookrightarrow X$ *;*

(*iii*) γ_x *est une immersion injective.*

Exercice 6.3.9. *Une* famille lisse *de champs de vecteurs* $(v_y)_{y \in Y}$ *sur une variété* X *est une application lisse* $v : X \times Y \to TX$ *telle que* $v_y := v|_{X \times \{y\}}$ *est un champ de vecteurs sur* X *pour tout* $y \in Y$. *En interprétant* v *comme un champ de vecteurs sur* $X \times Y$, *montrer que le flot* $\phi_t^y(x)$ *de* v_y *est une fonction* C^∞ *de* (t, x, y).

Exercice 6.3.10. *Pour toute variété* X, *montrer que le groupe* $\mathrm{Diff}(X)$ *des difféomorphismes* $\phi : X \to X$ *agit par transformations linéaires sur l'espace* $\Gamma(X, TX)$ *des champs de vecteurs* v *en posant*

$$\phi_* v := d\phi \circ v \circ \phi^{-1}.$$

Exercice 6.3.11. *Un* groupe de Lie G *est une variété munie d'une structure de groupe telle que la multiplication et l'inversion sont lisses.*

(*i*) *En utilisant l'action de* G *sur lui-même par multiplication à gauche, construire une trivialisation canonique* $TG \simeq G \times T_eG$, *et vérifier que l'évaluation en e fournit un isomorphisme* $\Gamma(G, TG)^G \simeq T_eG$.

(*ii*) *Montrer que le flot* $\exp(tv)$ *de tout champ de vecteurs invariant* v *satisfait* $\phi_t^v(x) = \phi_t^v(e)x$ *et* $\phi_{s+t}^v(e) = \phi_s^v(e)\phi_t^v(e)$, *et en déduire que* v *est complet.*

(*iii*) *Montrer l'*application exponentielle $\exp : T_eG \to G$ *définie par* $\exp(v) := \phi_1^v(e)$ *est lisse, et satisfait* $d_0 \exp = \mathrm{id}_{T_eG}$.

Chapitre 7

Formes différentielles

7.1 Un peu d'algèbre multilinéaire

Dans ce qui suit, les espaces vectoriels sont sur un corps $\mathbb{K}$ fixé, et peuvent être de dimension infinie.

Produit tensoriel

Soient $V_1, \ldots, V_p, W$ des espaces vectoriels. Une application

$$\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$$

est *multilinéaire* si elle est linéaire en chaque variable.

Théorème 7.1.1. *Etant donné des espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_p$, il existe un espace vectoriel $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$, appelé* produit tensoriel *des V_i, muni d'une application multilinéaire*

$$V_1 \times \cdots \times V_p \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$$

notée

$$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p,$$

avec la propriété suivante : toute application multilinéaire $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ se factorise de façon unique par une application linéaire $\bar{\varphi} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to W$, i.e.

$$\varphi(v_1, \ldots, v_p) = \bar{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

pour tous $v_1, \ldots, v_p$.

Cette construction est unique à isomorphisme unique près, et est fonctorielle, i.e. la donnée d'applications linéaires $\alpha_i : V_i \to V_i'$ induit une application linéaire

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_p',$$

de façon compatible avec la composition.

Démonstration. L'unicité et la fonctorialité résultent de la propriété universelle. Quant à l'existence, elle s'obtient en partant du K-espace vectoriel $\mathbb{K}^{(\Pi)}$ ayant pour base les éléments $v = (v_i)$ de l'*ensemble* produit $\Pi := \prod_i V_i$, et en le quotientant par le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme

$$(\dots, v_i + v_i', \dots) - (\dots, v_i, \dots) - (\dots, v_i', \dots)$$

et

$$(\dots, \lambda v_i, \dots) - \lambda(\dots, v_i, \dots)$$

avec $v_i, v_i' \in V_i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. □

Proposition 7.1.2. *Si (e_{ij}) est une base de V_i pour $i = 1, \dots, p$, alors les tenseurs $e_{1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{pj_p}$ forment une base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$. Pour des espaces de dimension finie, on a donc*

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) = (\dim V_1) \dots (\dim V_p).$$

Démonstration. La donnée d'une application multinéaire $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ est équivalente à celle de ses valeurs sur les vecteurs du type $(e_{1j_1}, \dots, e_{pj_p})$. De façon équivalente, la donnée d'une application linéaire $\alpha : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to W$ est équivalente à celle de ses valeurs sur les tenseurs $e_{1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{pj_p}$, et on conclut par l'exercice suivant. Le même raisonnement s'applique dans le cas alterné. □

Exercice 7.1.3. *Montrer qu'une famille de vecteurs (v_i) d'un espace vectoriel V est une base ssi la donnée de toute application linéaire $V \to W$ est équivalente à celle de ses valeurs sur les v_i.*

Exercice 7.1.4. *Montrer que le produit tensoriel est commutatif, associatif et distributif, au sens où l'on dispose d'isomorphismes canoniques et fonctoriels*

$$V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1,$$

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

et

$$(V_1 \oplus V_1') \otimes V_2 \simeq (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1' \otimes V_2).$$

Exercice 7.1.5. *Si V, W sont deux espaces vectoriels de dimension finie, montrer que l'application bilinéaire qui associe à $(\lambda, w) \in V^* \times W$ l'application linéaire $v \mapsto \lambda(v)w$ induit un isomorphisme*

$$V^* \otimes W \simeq \operatorname{Hom}(V, W).$$

Produit extérieur

Soient V, W des espaces vectoriels et $p \in \mathbb{N}$. Une application multilinéaire $\varphi : V^p \to W$ est *alternée* si $\varphi(v_1, \ldots, v_p) = 0$ lorsque deux des v_i sont égaux, ce qui équivaut à

$$\varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(v_1, \ldots, v_p)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, de signature $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$.

Théorème 7.1.6. *Pour tout espace vectoriel V et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un espace vectoriel $\bigwedge^p V$, appelé* p-ème puissance alternée de V*, muni d'une application p-linéaire alternée*

$$V^p \to \bigwedge^p V$$

notée

$$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p,$$

avec la propriété suivante : toute application p-linéaire alternée $\varphi : V^p \to W$ se factorise de façon unique par une application linéaire $\bar{\varphi} : \bigwedge^p V \to W$.

Cette construction est ici unique à isomorphisme unique près et fonctorielle, i.e. toute application linéaire $\alpha : V \to V'$ induit une application linéaire

$$\bigwedge^p \alpha : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p V'.$$

Démonstration. La preuve est la même que ci-dessus, en définissant cette fois $\bigwedge^p V$ comme quotient de $V^{\otimes p}$ par le sous-espace engendré par les tenseurs du type

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p - \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots v_{\sigma(p)}$$

avec $v_1, \ldots, v_p \in V$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. □

Remarque 7.1.7. On définit de même les puissances symétriques S^pV en utilisant les applications p-linéaires symétriques sur V, mais nous n'en aurons pas l'usage dans la suite.

Le raisonnement employé pour montrer la proposition 7.1.2 fournit :

Proposition 7.1.8. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, alors les $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ avec $I = \{i_1 < \cdots < i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ forment une base de $\bigwedge^p V$. En particulier,*

$$\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$$

pour $0 \leq p \leq n$, et 0 sinon.

En particulier, la *droite déterminant* de V est l'espace de dimension 1

$$\det V := \bigwedge^n V.$$

Exercice 7.1.9. *Soit $\alpha : V \to V'$ une application linéaire entre espaces de même dimension, et (e_i), (e'_i) des bases de V, V'. Montrer que*

$$(\det \alpha)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = c\, e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n$$

avec $c \in \mathbb{K}$ le déterminant de α dans les bases (e_i) et (e'_i).

Proposition 7.1.10. *A toute suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ correspond une isomorphisme fonctoriel*

$$\det V \simeq \det V' \otimes \det V''.$$

Démonstration. On pose $a = \dim V'$, $b = \dim V''$, et on définit une application multilinéaire $\varphi :' V'^a \times V^b \to \bigwedge^{a+b} V$ en posant

$$\varphi(v'_1, \dots, v'_a, v_1, \dots, v_b) := v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_a \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_b.$$

On vérifie aisément que cette quantité est nulle dès que l'un des v_i appartient à V', et que φ induit donc une application linéaire $\bigwedge^a V' \otimes \bigwedge^b V'' \to \bigwedge^{a+b} V$, qui fournit l'isomorphisme recherché. $\square$

Exercice 7.1.11. *Montrer qu'une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_p \in V$ est linéairement indépendante ssi $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$ dans $\bigwedge^p V$.*

Exercice 7.1.12. *Montrer qu'on dispose d'une unique application bilinéaire*

$$\bigwedge^p V \times \bigwedge^p (V^\star) \to \mathbb{K}$$

telle que

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p) \mapsto \det(\varphi_i(v_j))_{1 \le i,j \le p}$$

pour tous $v_1, \dots, v_p \in V$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in V^\star$, et montrer qu'elle induit un isomorphisme canonique

$$\bigwedge^p (V^\star) \simeq \left(\bigwedge^p V \right)^\star$$

si V est de dimension finie.

On peut donc identifier $\bigwedge^p (V^\star) \simeq (\bigwedge^p V)^\star$ avec l'espace des p-formes alternées sur V, lorsque ce dernier est de dimension finie.

Algèbres graduées

Une *algèbre graduée* $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} A_p$ est une $\mathbb{K}$-algèbre munie d'une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels tels que $A_p \cdot A_q \subset A_{p+q}$. Un élément $a \in A$ est *homogène de degré* $\deg(a) = p$ si il appartient à l'un des A_p, et A est dite *anticommutative* si elle satisfait

$$ab = (-1)^{\deg(a)\deg(b)} ba$$

pour tous $a, b \in A$ homogènes (règle d'échange qui induit un signe $(-1)^{\deg(a)\deg(b)}$ lorsque l'ordre de a et b sont échangés).

Exemple 7.1.13. Si V est un espace vectoriel, $\bigwedge V := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \bigwedge^p V$ est muni d'une structure d'algèbre graduée anticommutative, caractérisée par

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)(w_1 \wedge \cdots \wedge w_q) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q.$$

On appelle $\bigwedge V$ *l'algèbre extérieure* de V.

Si A, B sont deux algèbres graduées anticommutatives, on munit $A \otimes B$ d'une structure d'algèbre graduée anticommutative en posant

$$(A \otimes B)_m := \bigoplus_{p+q=m} A_p \otimes B_q,$$

et

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg(b)\deg(a')}(aa' \otimes bb'),$$

pour a, b, a', b' homogènes (règle d'échange).

Exercice 7.1.14. *Montrer que ceci définit bien une structure d'algèbre graduée anticommutative sur $A \otimes B$, et que la donnée de deux morphismes $A \to C$, $B \to C$ vers une algèbre graduée anticommutative induit un unique morphisme $A\otimes B \to C$ (i.e. $A\otimes B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie des algèbres graduées anticommutatives).*

Exercice 7.1.15. *Montrer que l'algèbre extérieure $\bigwedge V$ d'un espace vectoriel V est caratérisée par la propriété universelle suivante : une application linéaire $V \to A_1$ vers la partie de degré 1 d'une algèbre graduée anticommutative A s'étend de façon unique en un morphisme d'algebres graduées $\bigwedge V \to A$.*

Exercice 7.1.16. *Si V, W sont deux espaces vectoriels, montrer qu'on dispose d'un isomorphisme canonique et fonctoriel*

$$\bigwedge (V \oplus W) \simeq \left(\bigwedge V\right) \otimes \left(\bigwedge W\right).$$

Remarque 7.1.17. Si V est de dimension finie, on peut voir $\alpha \in \bigwedge^p V^\star$ et $\beta \in \bigwedge^q V^\star$ comme des formes multilinéaires alternées sur V (exercice 7.1.12), et on montre que leur produit extérieur est explicitement donné par

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha \left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right) \beta \left(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}\right),$$

où la somme est prise sur les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$ telles que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

7.2 L'algèbre extérieure d'une variété

Formes différentielles

Si X est une variété, on note $T^\star X$ son *fibré cotangent*, i.e. le dual de son fibré tangent TX, et $\bigwedge^p T^\star X$ le fibré vectoriel associé via le foncteur $V \mapsto \bigwedge^p V$. Une *p-forme différentielle* sur X est une section ω du fibré $\bigwedge^p T^\star X$, qu'on peut donc voir comme une famille lisse de p-formes alternées ω_x sur les espaces tangents $T_x X$ de X. On note

$$\Omega^p(X) := \Gamma\left(X, \bigwedge^p T^\star X\right),$$

l'espace des p-formes sur X, et on définit l'*algèbre extérieure* de X en posant

$$\Omega(X) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(X) = \Gamma\left(X, \bigwedge T^\star X\right),$$

qui une algèbre graduée anticommutative pour le produit extérieur.

Cette construction est fonctorielle, i.e. toute application lisse $\phi : X \to Y$ induit un morphisme d'algèbres graduées (de degré 0) $\phi^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$, qui satisfait $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$. Si α est une p-forme sur Y, la p-forme $\phi^*\alpha$ est appelée *tiré-en-arrière de α par ϕ*.

La différentielle d'une fonction $f \in C^\infty(X) = \Omega^0(X)$ définit une famille lisse de formes linéaires $d_x f \in T_x^\star X$, qu'on peut donc voir comme une 1-forme $df \in \Omega^1(X)$, et on a $d(f \circ \phi) = \phi^* df$ pour toute $\phi : X \to Y$.

Exemple 7.2.1. Si on note (x_i) les coordonnées d'un ouvert de carte $U \subset X$, leurs différentielles dx_i définissent une base de $T^\star U$, et toute p-forme ω sur U s'écrit de façon unique

$$\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx_I$$

où $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ pour toute partie $I = \{i_1 < \cdots < i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ et les ω_I sont des fonctions lisses sur U.

Si $\phi : Y \to X$ est une application lisse et $\phi_i := x_i \circ \phi$ désigne les composantes de sa restriction à $\phi^{-1}(U)$, alors

$$\phi^*\omega = \sum_I (\omega_I \circ \phi) d\phi_I$$

sur $\phi^{-1}(U)$, où l'on note comme avant $d\phi_I = d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_p}$.

Exercice 7.2.2. *Pour une fonction lisse f sur un ouvert de carte, on a*

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

La différentielle extérieure

Théorème 7.2.3. *Etant donnée une variété X, il existe une unique façon d'associer à tout ouvert $U \subset X$ une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ de degré 1 avec les propriétés suivantes :*

1. ***compatibilité :*** *d coincide avec la définition précédente en degré 0 ;*
2. ***localité :*** *d commute à la restriction aux sous-ouverts.*
3. ***dérivation :*** *d satisfait la formule de Leibniz graduée*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

(règle d'échange entre α et d) ;

4. ***condition de complexe :*** *$d \circ d = 0$;*

On a en outre $d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$ pour toute application lisse $\phi : X \to Y$.

Démonstration. Soient (x_i) les coordonnées d'un ouvert de carte $U \subset X$, et considérons une p-forme $\omega = \sum_{|I|=p} \omega_I dx_I$. Les conditions sur d donnent

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_{I,i} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I, \tag{7.2.1}$$

ce qui montre que d est unique sur U, et il suffit donc de prouver l'existence localement. On choisit donc des coordonnées locales (x_i), et on définit d par (7.2.1). Pour voir que d est une antidérivation, il suffit de vérifier que

$$d\left((f\,dx_I) \wedge (g\,dx_J)\right) = d(f\,dx_I) \wedge (g\,dx_J) + (-1)^{|I|} f\,dx_I \wedge d(g\,dx_J) \tag{7.2.2}$$

pour $f, g \in C^\infty$ et $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$. Par définition, le membre de gauche de (7.2.2) vaut

$$d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (g\,df + f\,dg) \wedge dx_I \wedge dx_J,$$

et le membre de droite de (7.2.2) s'écrit

$$(df \wedge dx_I) \wedge (g\, dx_J) + (-1)^{|I|} f\, dx_I \wedge (dg \wedge dx_J)$$

$$= g\, df \wedge dx_I \wedge dx_J + f\, dg \wedge dx_I \wedge dx_J,$$

d'où (7.2.2). Il reste à montrer que $d^2 = 0$, et il suffit à nouveau de le tester sur une p-forme du type $f\, dx_I$. On a par définition

$$d^2(f\, dx_I) = d(df \wedge dx_I) = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right)$$

$$= \sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_I = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I,$$

qui est nulle par symétrie de $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et antisymétrie de $dx_j \wedge dx_i$. □

7.3 Orientation et intégration

Orientabilité

Définition 7.3.1. Une variété X est *orientable* si elle admet une *forme volume*, i.e. une n-forme partout non-nulle.

Proposition 7.3.2. *Une variété est orientable ssi elle admet un atlas orienté, i.e. un atlas dont les applications de transition préservent l'orientation de* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit ω une forme volume sur X, et (U_i, ϕ_i) un atlas de X avec U_i connexe pour tout i. Pour chaque i, $\phi_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = f_i \omega$ avec $f_i \in C^\infty(U_i)$ partout non-nulle, et donc $f_i > 0$ ou $f_i < 0$ partout sur U_i. Le nouvel atlas (U_i, ψ_i) obtenu en posant $\psi_i := \phi_i$ si $f_i > 0$ et $\psi_i = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1) \circ \phi_i$ si $f_i < 0$ est alors orienté.

Supposons réciproquement donné un atlas orienté (U_i, ϕ_i), et posons $\omega_i := \phi_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$. Si on choisit une partition de l'unité (θ_i) subordonnée à (U_i), alors $\omega := \sum_i \theta_i \omega_i$ est une n-forme sur X ; elle est de plus non-nulle en tout point de X, car le fait que $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ préserve l'orientation implique que ω_i et ω_j sont positivement proportionnelles, pour tous i, j. □

Si ω, ω' sont deux formes volumes sur une variété orientable X, alors $\omega = f\omega'$ pour une unique fonction lisse $f : X \to \mathbb{R}^\times$, et on dit que ω et ω' *définissent la même orientation* si $f > 0$ en tout point. Ceci définit une relation d'équivalence sur les formes volumes, dont les classes d'équivalence sont appelées *orientations* de X. Clairement, X possède deux choix d'orientation pour chacune de ses composantes connexes.

Une forme volume ω sur une variété orientée est dite *positive*, notée $\omega > 0$, si elle définit l'orientation de X. On dit qu'un difféomorphisme $\phi : X \to Y$

entre variétés orientées *préserve l'orientation* si $\phi^*\omega > 0$ pour toute forme volume $\omega > 0$ sur Y. Si $X = Y$ est connexe, cette condition ne dépend pas du choix de l'orientation de X.

Intégration sur une variété orientée

On commence par définir l'intégrale de formes à support compact.

Théorème 7.3.3. *Si X est une variétée orientée, il existe une unique application linéaire $\int_X : \Omega^n_c(X) \to \mathbb{R}$ sur l'espace des n-formes ω à support compact telle que, pour toute carte (U, ϕ) préservant l'orientation et toute fonction $f \in C^\infty_c(\phi(U))$,*

$$\int_X \phi^*(f dx_1 \wedge \dots dx_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

coïncide avec l'intégrale de Lebesgue de f. On a de plus :
(i) $\int_X \omega \geq 0$ pour toute $\omega \in \Omega^n_c(X)$ avec $\omega \geq 0$;
(ii) $\int_X \omega = \int_Y \phi^*\omega$ pour tout difféomorphisme $\phi : Y \to X$ de variétés orientées préservant l'orientation.

Démonstration. Tout point de X appartient à une carte (U, ϕ) (connexe) préservant l'orientation (après composition avec un automorphisme linéaire adéquat). On peut donc couvrir X par une famille de cartes (U_i, ϕ_i) préservant l'orientation, et on choisit alors une partiton de l'unité (θ_i) soit subordonnée. Pour toute $\omega \in \Omega^n_c(X)$, $\omega_i := \theta_i\omega \in \Omega^n(X)$ est à support compact dans U_i, et $\omega = \sum_i \omega_i$, avec $\omega_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i. On peut écrire

$$(\phi_i^{-1})^*\omega_i = f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec $f_i \in C^\infty_c(\phi_i(U_i))$, et on pose

$$\int_X \omega := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} f_i dx. \tag{7.3.1}$$

Etant donnée une carte $\phi : U \simeq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ préservant l'orientation et $f \in C^\infty_c(\phi(U))$, il reste maintenant à vérifier que $\omega := \phi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ vérifie $\int_X \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$. On note pour cela $\psi_i := \phi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \cap U_i) \simeq \phi(U \cap U_i)$ les applications de transition, et on observe que

$$\begin{aligned}(\phi_i^{-1})^*(\theta_i\omega) &= (\theta_i \circ \phi_i^{-1})(f \circ \psi_i)\psi_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \left[\left(\left(\theta_i \circ \phi^{-1}\right) f\right) \circ \psi_i\right] J_{\psi_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,\end{aligned}$$

avec J_{ψ_i} le jacobien de ψ_i. Par (7.3.1), on a donc

$$\int_X \omega = \sum_i \int_{\phi_i(U \cap X_i)} \left[\left(\left(\theta_i \circ \phi^{-1}\right) f\right) \circ \psi_i\right] J_{\psi_i} dx.$$

Puisque ϕ_i et ϕ préservent l'orientation, le jacobien de ψ_i est positif ; la formule habituelle du changement de variable donne donc

$$\int_{\phi_i(U\cap X_i)} \left[\left(\left(\theta_i \circ \phi^{-1}\right) f\right) \circ \psi_i\right] dx = \int_{\phi(U\cap X_i)} \left(\theta_i \circ \phi^{-1}\right) f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\theta_i \circ \phi^{-1}\right) f dx,$$

et on obtient bien

$$\int_X \phi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_i \theta_i \circ \phi^{-1}\right) f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

□

Si maintenant $f : Y \to X$ est une application lisse d'une variété *orientée* Y de dimension p vers une variété quelconque X, on pourra ≪intégrer sur Y≫ une p-forme $\alpha \in \Omega^p(X)$ en considérant $\int_Y f^*\alpha$, qui fait sens dès que $f^{-1}(\operatorname{supp}\alpha)$ est compact.

En particulier, on peut intégrer $\alpha \in \Omega_c^p(Y)$ sur une sous-variété fermée orientée $Y \subset X$ en posant $\int_Y \alpha := \int_Y \iota^*\alpha$, avec $\iota : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion.

Le théorème précédent permet en fait de définir une théorie de l'intégration beaucoup plus générale. On s'appuie pour ceci sur la forme suivante du théorème de Riesz.

Lemme 7.3.4. *Toute forme linéaire positive $\lambda : C_c^\infty(X) \to \mathbb{R}$ est de la forme $f \mapsto \int_X f\mu$ pour une unique mesure positive μ sur X.*

Démonstration. D'après l'exercice 4.4.5, toute $f \in C_c^0(X)$ s'écrit comme limite uniforme d'une suite $f_i \in C_c^\infty(X)$ à support dans un compact fixe K (cf. théorème 9.2.1 pour une vaste généralisation). Choisissons une fonction plateau $\chi \in C^\infty(X)$ telle que $0 \le \chi \le 1$, $\chi \equiv 1$ sur K. Puisque

$$-\|f_i - f_j\|_\infty \chi \le f_i - f_j \le \|f_i - f_j\|_\infty \chi,$$

on obtient $|\lambda(f_i) - \lambda(f_j)| \le \lambda(\chi)\|f_i - f_j\|_\infty$, ce qui montre que la suite $\lambda(f_i)$ est de Cauchy. En notant $\lambda(f)$ sa limite, on obtient une unique extension positive $\lambda : C_c^0(X) \to \mathbb{R}$, et le résultat résulte alors du classique théorème de Riesz. □

Pour toute forme volume $\omega_X > 0$ sur X, l'application linéaire $C_c^\infty(X) \to \mathbb{R}$ par $f \mapsto \int_X f\omega_X$ est positive, ce qui permet d'identifier ω_X à une mesure positive sur X.

Définition 7.3.5. Une *n-forme intégrable* ω sur X est une section mesurable du fibré en droites $\det T^\star X$ telle que $f \in L^1(X, \omega_X)$, où $\omega_X > 0$ est une forme volume et f est la fonction mesurable telle que $\omega = f\omega_X$. On pose alors $\int_X \omega = \int_X f\omega_X$.

Exercice 7.3.6. *Vérifier que la définition précédente ne dépend pas du choix de ω_X.*

7.4 La formule de Stokes

On dit qu'un ouvert $\Omega \subset X$ est à *bord lisse* si tout point du bord $\partial\Omega$ appartient à une carte $U \subset X$ telle que

$$U \cap \Omega = \{x \in U \mid x_1 < 0\}$$

dans les coordonnées correspondantes. On a alors $\partial\Omega \cap U = \{x_1 = 0\}$, de sorte que $\partial\Omega$ est une hypersurface fermée de X.

Si X est orientée, $\partial\Omega$ hérite de plus d'une orientation pour laquelle une $(n-1)$-forme α sur $\partial\Omega$ est positive ssi $dx_1 \wedge \alpha$ est positive en tout point de $\partial\Omega \cap U$.

Théorème 7.4.1. *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert à bord lisse d'une variété orientée. Pour toute forme $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(X)$, on a alors*

$$\int_\Omega d\alpha = \int_{\partial\Omega} \alpha.$$

Le membre de gauche est ici défini comme $\int_X \mathbf{1}_\Omega d\alpha$, la n-forme mesurable $\mathbf{1}_\Omega d\alpha$ étant clairement intégrable.

Démonstration. En utilisant une partition de l'unité, on est ramené comme précédemment au cas où $\alpha \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega = \{x_1 < 0\}$. On écrit

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

avec $\alpha_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc

$$d\alpha = \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

et

$$\alpha|_{\partial\Omega} = \alpha_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n|_{\partial\Omega}.$$

En utilisant Fubini et la formule d'intégration par parties en une variable, il s'ensuit que

$$\int_\Omega d\alpha = \sum_i (-1)^{i-1} \int_{\{x_1<0\}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \alpha_1(0, x') dx' = \int_{\partial\Omega} \alpha.$$

□

7.5 Exercices

Exercice 7.5.1. *On suppose que X est orientable. Montrer qu'une sous-variété $Y \subset X$ est orientable ssi son fibré normal $N(Y/X)$ est orientable. En déduire qu'une hypersurface $H \subset X$ est orientable ssi il existe un champ de vecteurs ν sur X avec $\nu(x) \notin T_xH$ pour tout $x \in H$.*

Exercice 7.5.2. *Déduire des exercices 6.3.6 et 5.4.9 que toute hypersurface fermée de $\mathbb{R}^n$ est orientable. Est-ce encore vrai pour une hypersurface localement fermée ? (on pourra penser au ruban de Möbius).*

Exercice 7.5.3. *Si $\phi : X \to Y$ est un difféomorphisme local, alors Y orientable implique X orientable.*

Exercice 7.5.4. *Soit G un groupe agissant proprement discontinûment sur une variété connexe X. On rappelle que l'espace des orbites est muni d'une unique structure de variété telle que $\pi : X \to X/G$ soit un difféomorphisme local.*

(i) Montrer qu'une p-forme sur X est G-invariante ssi elle est le tiré-en-arrière d'une p-forme sur X/G.

(ii) Montrer que X/G est orientable ssi X est orientable et G préserve l'orientation.

(iii) Montrer que le ruban de Möbius et la bouteille de Klein ne sont pas orientables, et montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable ssi n pair.

Exercice 7.5.5 (Revêtement d'orientation d'une variété)**.** *On définit le* revêtement d'orientation $\pi : \mathrm{Or}(X) \to X$ *d'une variété X comme le revêtement d'orientation du fibré en droites* $\det TX$ *(cf. exercice 5.4.8).*

(i) *Montrer que la donnée d'une orientation de X équivaut à celle d'une section de π, i.e. une application lisse $\sigma : X \to \mathrm{Or}(X)$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$.*

(ii) *Montrer que la variété $\mathrm{Or}(X)$ est toujours orientable, et que l'involution de $\mathrm{Or}(X)$ préserve l'orientation ssi X est orientable.*

Exercice 7.5.6. *Montrer que la 1-forme $\alpha = \frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ satisfait $d\alpha = 0$, et calculer son intégrale sur le cercle unité. Peut-on écrire $\alpha = df$ avec $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$?*

Exercice 7.5.7. *Si X, X' sont orientées, $X \times X'$ est munie de l'orientation produit et $\pi : X \times X' \to X$, $\pi' : X \times X' \to X'$ désignent les deux projections, montrer que*

$$\int_{X \times X'} \pi^*\alpha \wedge \pi'^*\alpha' = \left(\int_X \alpha\right)\left(\int_{X'} \alpha'\right)$$

pour $\alpha \in \Omega^{\dim X}(X)$, $\alpha' \in \Omega^{\dim X'}(X')$.

Exercice 7.5.8. *Montrer qu'une p-forme $\alpha \in \Omega^p(X)$ est nulle ssi $\int_X \alpha \wedge \beta = 0$ pour tout $\beta \in \Omega_c^{n-p}(X)$.*

Chapitre 8

Cohomologie de de Rham

8.1 Cohomologie d'un complexe

Dans ce qui suit, tous les espaces vectoriels et algèbres sont sur un corps $\mathbb{K}$ fixé.

Homologie d'un espace vectoriel différentiel

Un *espace vectoriel différentiel* (C, d_C) est la donnée d'un espace vectoriel C et d'une application linéaire $d_C : C \to C$ tel que $d_C \circ d_C = 0$. Pour faire bref, on désignera simplement par C l'espace vectoriel différentiel, et d sa différentielle.

Les sous-espaces de *cycles* et de *bords* de C sont respectivement définis comme $Z := \operatorname{Ker} d$ et $B := \operatorname{Im} d$, et l'*homologie* de C est l'espace vectoriel quotient $H(C) := Z/B$.

Un *morphisme* $f : C \to C'$ d'espaces vectoriels différentiels est une application linéaire telle que $fd = df$; un tel morphisme vérifie $f(Z) \subset Z'$ et $f(B) \subset B'$, et induit donc une application linéaire

$$H(f) : H(C) \to H(C').$$

Cette construction est fonctorielle, i.e. satisfait $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$. Si $H(f)$ est un isomorphisme, on dit que f est un *quasi-isomorphisme.*

Définition 8.1.1. Deux morphismes $f, g : C \to C'$ d'espaces vectoriels différentiels sont *homotopes*, noté $f \sim g$, s'il existe une application linéaire $K : C \to C'$ telle que $f - g = d \circ K + K \circ d$.

La terminologie sera jusifiée par le théorème 8.3.3. L'homotopie est clairement une relation d'équivalence, et il est immédiat de voir que

$$f \sim g \Longrightarrow H(f) = H(g).$$

Exemple 8.1.2. Pour montrer qu'un morphisme $f : C \to C'$ est un quasi-isomorphisme, il suffit d'exhiber $g : C' \to C$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}$.

Considérons maintenant une suite exacte

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$$

d'espaces vectoriels différentiels.

Lemme 8.1.3. *La suite induite*

$$H(C') \xrightarrow{H(i)} H(C) \xrightarrow{H(p)} H(C'')$$

est exacte.

Démonstration. Soit $x \in Z$ tel que $[x]$ est dans le noyau de $H(p)$, i.e. $p(x) = dy''$. Si $y \in C$ est un antécédent de y'', alors $p(x) = dp(y) = p(dy)$, et donc $x = dy + i(x')$. Puisque $dx = i(dx') = 0$, on a $x' \in Z'$ par injectivité de i, i.e. $[x] = H(i)[x']$. □

Les flèches $H(i)$ est $H(p)$ ne sont respectivement pas injectives et surjectives en général, et on va voir que le noyau de $H(i)$ et l'image sont tous deux contrôlés par une même application linéaire $\partial : H(C'') \to H(C)$, appelée *morphisme de connexion.*

Notons tout d'abord que $p(C) = C''$ entraîne $B'' = dp(C) = p(dC) = p(B)$, et la surjectivité de $H(p)$ est donc équivalente à $p(Z) = Z''$. Tout $x'' \in Z''$ admet un antécédent $x \in C$, bien défini modulo $i(C')$. On $p(dx) = dp(x) = dx'' = 0$, donc $dx \in i(C') \cap Z = i(Z')$, et dx est bien défini modulo $di(C') = i(dC') = i(B')$. Par injectivité de i, l'application $x'' \mapsto dx \mod i(B')$ définit une application linéaire $Z'' \to Z'/B' = H(C')$. Si $x'' \in B''$, on peut en choisir un antécédent $x \in B$, et donc $dx = 0$. Il en résulte que $Z'' \to H(C')$ passe au quotient, définissant l'application $\partial : H(C'') \to H(C')$ recherchée.

Proposition 8.1.4. *Pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$$

d'espaces vectoriels différentiels, la suite induite

$$H(C'') \xrightarrow{\partial} H(C') \xrightarrow{H(i)} H(C) \xrightarrow{H(p)} H(C'') \xrightarrow{\partial} H(C')$$

est exacte.

Démonstration. Soit $x'' \in Z''$, et $x \in C$ un antécédent. Par construction,

$$[x''] \in \operatorname{Ker} \partial \iff dx \in i(B') = di(C') \iff x + i(C') \cap Z \neq \emptyset$$

$$\iff x'' \in p(Z) \iff [x''] \in \operatorname{Im} H(p),$$

ce qui prouve l'exactitude en $H(C'')$. De plus, l'image de $\operatorname{Im}\partial$ consiste en les classes modulo B' des $x' \in Z'$ tels que $i(x') \in dC = B$. En d'autres termes, $\operatorname{Im}\partial = i^{-1}(B)/B' = \operatorname{Ker} H(i)$, ce qui montre l'exactitude en $H(C')$. □

Exercice 8.1.5 (Lemme des cinqs)**.** *Considérons un diagramme commutatif d'espaces vectoriels*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Montrer que si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 l'est aussi.

Exercice 8.1.6 (Fonctorialité)**.** *Considérons un diagramme d'espaces vectoriels différentiels*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D' \arrow[r] & D \arrow[r] & D'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{8.1.1}$$

dont les lignes sont exactes.

(i) *Vérifier que le diagramme induit*

$$\begin{tikzcd} H(C'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H(C') \arrow[d] \\ H(D'') \arrow[r, "\partial"] & H(D') \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) *Si deux des flèches verticales de (8.1.1) sont des quasi-isomorphismes, montrer que la troisième l'est aussi.*

Cohomologie d'une complexe

Un *complexe d'espaces vectoriels* $C^\bullet$ est une suite doublement infinie d'applications linéaires

$$\cdots \longrightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} C^q \xrightarrow{d^q} C^{q+1} \longrightarrow \cdots$$

telle que $d^q \circ d^{q-1} = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. L'espace $B^q := \operatorname{Im} d^{q-1}$ des q-cobords est donc contenu dans celui $Z^q := \operatorname{Ker} d^q$ des q-cocycles, et on définit le q-ème espace de cohomologie de $C^\bullet$ comme le quotient $H^q(C^\bullet) := Z^q/B^q$, qui mesure donc le défaut d'exactitude en C^q. Un *morphisme de complexes* $f : C^\bullet \to C'^\bullet$ est une suite d'applications linéaires $f^q : C^q \to C'^q$ telles que $d^q f^q = f^q d^q$, et il induit fonctoriellement des morphismes $H^q(f) : H^q(C^\bullet) \to H^q(C'^\bullet)$. Enfin, une homotopie entre deux deux morphismes de complexes $f, g : C^\bullet \to C'^\bullet$ est la donnée d'une suite d'applications linéaires $K^q : C^q \to C^{q-1}$ telle que $f^q - g^q = dK^q + K^{q+1}d$ pour tout q.

Ces définitions sont en fait un cas particulier des précédentes, car la donnée d'un complexe $C^\bullet$ est équivalente à celle d'un espace vectoriel différentiel gradué $\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^q$ dont la différentielle d est de degré 1, i.e. $d(C^q) \subset C^{q+1}$. Les cycles, bords et homologie se décomposent alors en

$$\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} Z^q, \ \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B^q \text{ et } \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^q(C^\bullet),$$

et un morphisme de complexes est un morphisme d'espaces vectoriels différentiels gradués de degré 0. Par construction, le morphisme de connexion d'une suite exacte de complexes

$$0 \to C'^\bullet \to C^\bullet \to C''^\bullet \to 0$$

est de degré 1, i.e. consiste en une suite de morphismes

$$\partial^q : H^q(C''^\bullet) \to H^{q+1}(C'^\bullet)$$

s'inscrivant dans une suite exacte longue

$$\cdots \to H^{q-1}(C''^\bullet) \to H^q(C'^\bullet) \to H^q(C^\bullet) \to H^q(C''^\bullet) \to H^{q+1}(C'^\bullet) \to \dots.$$

Exercice 8.1.7. *Une* algèbre différentielle graduée *est une algèbre graduée anticommutative $A = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} A_q$ munie d'une différentielle d de degré 1 satisfaisant la formule de Leibniz graduée. Montrer que $H(A)$ est alors également une algèbre graduée anticommutative.*

8.2 Cohomologie de de Rham

Soit X une variété de dimension n. On définit la *cohomologie de de Rham* $H(X)$ comme l'algèbre de cohomologie (cf. exercice 8.1.7) de l'algèbre différentielle graduée

$$\Omega(X) = \bigoplus \Omega^p(X),$$

et la *cohomologie de de Rham à support compact* $H_c(X)$ comme celle de

$$\Omega_c(X) = \bigoplus \Omega_c^p(X).$$

On a donc

$$H^p(X) = \{p\text{-formes fermées}\}/\{p\text{-formes exactes}\},$$

et de même pour $H_c^p(X)$ avec des formes à support compact. On a bien sûr $H(X) = H_c(X)$ si X est compact.

Exemple 8.2.1. On note que $H^p(X) = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$, et $H^0(X) = \mathbb{R}^{\pi_0(X)}$.

Toute application lisse $f : X \to Y$ induit un morphisme d'algèbres différentielles $f^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$, et donc un morphisme d'algèbres graduées

$$f^* : H(Y) \to H(X).$$

Si f est de plus propre, f^* envoie $\Omega_c(Y)$ dans $\Omega_c(X)$, d'où

$$f^* : H_c(Y) \to H_c(X).$$

Exemple 8.2.2. $H_c^0(X) \simeq \mathbb{R}^{\pi_{0,c}(X)}$, avec $\pi_{0,c}(X)$ l'ensemble des composantes connexes compactes de X.

Proposition 8.2.3. *Si X est orientable, alors $H_c^n(X) \neq 0$.*

Comme on le verra plus loin, la réciproque est aussi vraie (pour X connexe), cf. exercice 8.6.4.

Démonstration. Toute n-forme α sur X est automatiquement fermée, car $d\alpha \in \Omega^{n+1}(X)$. Fixons maintenant une ortientation de X. Si $U \subset X$ est une carte de coordonnées (x_i), on peut trouver $\chi \in C_c^\infty(U)$ telle que $\alpha := \chi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ satisfait $\int_U \alpha = \int_X \alpha \neq 0$. La classe de α dans $H_c^n(X)$ est alors non nulle, sinon $\alpha = d\beta$ avec $\beta \in \Omega_c^{n-1}(X)$, et $\int_X d\beta = 0$ par Stokes. $\square$

8.3 Homotopie et lemme de Poincaré

Invariance par homotopie

Si X, Y sont deux variétés et $F \subset X$ est un fermé, on dit qu'une application $f : F \to Y$ est lisse si elle est la restriction d'une application lisse $\tilde{f} : U \to Y$ sur un voisinage ouvert $U \subset X$ de F.

Une *homotopie* est une application lisse $H : [0,1] \times X \to Y$ au sens précédent, i.e. admettant une extension lisse à un voisinage de $[0,1] \times X$ dans $\mathbb{R} \times X$. On peut voir une homotopie comme un chemin lisse $(h_t)_{t\in[0,1]}$ d'applications lisses $h_t : X \to Y$, via $h_t(x) = H(t, x)$.

Définition 8.3.1. Deux applications lisses $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une homotopie (lisse) h avec $h_0 = f$ et $h_1 = g$. On dit X est *contractile* si l'identité id_X est homotope à une constante.

Lemme 8.3.2. *Deux applications lisses $f, g : X \to Y$ sont homotopes ssi il existe une aplication lisse $H : \mathbb{R} \times X \to Y$ telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$.*

Démonstration. La condition est clairement suffisante. Supposons réciproquement donnée une homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. On peut trouver $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $\theta = 1$ sur $[1, +\infty[$, et l'application $\tilde{H} : \mathbb{R} \times X \to Y$ définie par

$$\tilde{H}(t,x) := H\left(\theta(t), x\right)$$

est alors lisse, avec $\tilde{h}_0 = f$ et $\tilde{h}_1 = g$. □

Théorème 8.3.3. *Deux applications lisses homotopes $f, g : X \to Y$ induisent des morphismes homotopes $f^*, g^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ d'algèbres différentielles graduées, et donc $f^* = g^*$ comme applications $H(Y) \to H(X)$.*

Corollaire 8.3.4. *Pour toute variété contractile X,*

$$H^p(X) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour } p = 0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On dit qu'une sous-variété $Z \subset X$ est un *rétract* de X s'il existe une rétraction, i.e. une application lisse $p : X \to Z$ telle que $p \circ \iota = \mathrm{id}_Z$, avec $\iota : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion. On a alors $\iota^* p^* = \mathrm{id}$, ce qui momtre que le morphisme de restriction $\iota^* : H(X) \to H(Z)$ est surjectif.

Si de plus $\iota \circ p : X \to X$ est homotope à id_X on dit que YZ est un *rétracte par déformation* de X, et le théorème 8.3.3 montre que ι^* est alors un isomorphisme.

Exercice 8.3.5. *Vérifier que $h_t(x) = (1-t)x + tx/\|x\|$ définit une rétraction par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur la sphère S^{n-1}.*

Intégrale-fibre

Théorème 8.3.6. *Pour toute partie mesurable $A \subset \mathbb{R}$, il existe une unique application linéaire*

$$\int_A : \Omega_c(\mathbb{R} \times X) \to \Omega_c(X)$$

de degré -1 satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) *la* formule de projection

$$\int_A (\alpha \wedge p_2^* \beta) = \left(\int_A \alpha \right) \beta$$

pour $\alpha \in \Omega_c(\mathbb{R} \times X)$, $\beta \in \Omega_c(X)$;

(ii) *pour $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times X)$*

$$\left(\int_A f p_1^* dt \right)(x) = \int_A f(t,x) dt.$$

Si A est de plus de mesure finie, $\int_A$ s'étend en un opérateur $\int_A : \Omega(\mathbb{R} \times X) \to \Omega(X)$ satisfaisant les mêmes propriétés pour des formes à support quelconque.

Via p_2, $\Omega_c(\mathbb{R} \times X)$ est naturellement un $\Omega_c(X)$-module (à droite) gradué, et la formule de projection exprime la $\Omega_c(X)$-linéarité de $\int_A$.

Démonstration. Soit $U \subset X$ une carte, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Chaque $\alpha \in \Omega_c^p(\mathbb{R} \times U)$ s'écrit de façon unique

$$\alpha = \sum_{|J|=p-1} f_J(t,x) dt \wedge dx_J + \sum_{|I|=p} g_I(t,x) dx_I,$$

avec $f_J, g_I \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times U)$, et (i), (ii) impliquent que

$$\int_A \alpha = \sum_{|J|=p-1} \left(\int_A f_J(t,x) dt \right) dx_J,$$

et donc l'unicité de $\int_A$ sur $\Omega_c(\mathbb{R} \times U)$. Réciproquement, on vérifie facilement que cette formule définit une application $\int_A : \Omega_c(\mathbb{R} \times U) \to \Omega_c(U)$ satisfaisant (i) et (ii). Dans le cas général, on recouvre X par une famille de cartes U_i, et on choisit une partiton de l'unité (θ_i) subordonnée à (U_i). Toute $\alpha \in \Omega_c(\mathbb{R} \times X)$ s'écrit alors comme somme finie $\alpha = \sum_i)(\theta_i \circ p_2)\alpha$ avec $(\theta_i \circ p_2)\alpha \in \Omega_c(\mathbb{R} \times U_i)$, et on obtient existence et unicité en posant $\int_A \alpha = \sum_i \int_A (\theta_i \circ p_2)\alpha$. ☐

Lemme 8.3.7. *Si on note $i_t : X \to \mathbb{R} \times X$ le plongement $x \mapsto (t,x)$, alors*

$$i_1^* - i_0^* = d \int_{[0,1]} + \int_{[0,1]} d.$$

Démonstration. Le résultat est local sur X, et on peut donc raisonner dans une carte U, de coordonnées (x_i). Il suffit alors de vérifier la formule sur les formes du type $f(t,x) dt \wedge dx_J$ et $f(t,x) dx_I$, ce qui résulte dans les deux cas d'un calcul sans difficulté. ☐

Preuve du théorème 8.3.3. On suppose que $f, g : X \to Y$ sont homotopes. D'après le lemme 8.3.2, on peut trouver $H : \mathbb{R} \times X \to Y$ lisse avec $h_0 = f$ et $h_1 = g$, i.e. $f = H \circ i_0$, $g = H \circ i_1$. Les applications induites $\Omega(Y) \to \Omega(X)$ satisfont $f^* = i_0^* H^*$ et $g^* = i_1^* H^*$, et le lemme 8.3.7 donne donc $g^* - f^* = dK + Kd$ avec $K := \int_{[0,1]} \circ H^*$. ☐

Lemme de Poincaré à support compact

Théorème 8.3.8. *Pour toute variété X, l'intégrale-fibre $\int_{\mathbb{R}} : \Omega_c(\mathbb{R} \times X) \to \Omega_c(X)$ induit un isomorphisme*

$$\int_{\mathbb{R}} : H_c(\mathbb{R} \times X) \simeq H_c(X)$$

de degré -1.

Corollaire 8.3.9. *La cohomologie à support compact de* $\mathbb{R}^n$ *est donnée par*

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour } p = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Un raisonnement similaire au lemme 8.3.7 $\int_{\mathbb{R}} d = -d\int_{\mathbb{R}}$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}}$ induit bien une application en cohomologie. On choisit ensuite $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi(t)dt = 1$. La formule de projection donne $\int_{\mathbb{R}} (\chi dt \wedge \bullet) =$ id sur $\Omega_c(X)$, et il suffira donc de montrer que $\chi dt \wedge \left(\int_{\mathbb{R}} \bullet\right)$ est homotope à l'identité de $\Omega_c(\mathbb{R} \times X)$. Or un calcul en coordonnées locales sur X montre qu'on a

$$\chi dt \wedge \left(\int_{\mathbb{R}} \alpha\right) - \alpha = dK\alpha \pm Kd\alpha$$

avec $K : \Omega_c(\mathbb{R} \times X) \to \Omega_c(\mathbb{R} \times X)$ défini par

$$K\alpha = \int_{-\infty}^{t} \alpha - \left(\int_{-\infty}^{t} \chi dt\right) \int_{\mathbb{R}} \alpha.$$

□

8.4 Suite de Mayer-Vietoris et bons recouvrements

Suite de Mayer-Vietoris

Théorème 8.4.1. *Si* $X = U \cup V$ *avec* U, V *ouverts, alors on a des suites exactes longues*

$$\cdots \to H^p(X) \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(U \cap V) \to \dots$$

et

$$\cdots \to H_c^p(U \cap V) \to H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) \to H_c^p(X) \to \dots$$

Démonstration. On dispose d'une suite de morphismes de complexes

$$0 \to \Omega(X) \to \Omega(U) \oplus \Omega(V) \to \Omega(U \cap V) \to 0, \tag{8.4.1}$$

où la première flèche envoie $\omega \in \Omega(X)$ sur $(\omega|_U, \omega|_V)$, et la seconde $(\alpha, \beta) \in \Omega(U) \oplus \Omega(V)$ sur $\alpha|_{U\cap V} - \beta|_{U\cap V}$. La suite exacte longue cherchée provient du fait que (8.4.1) est exacte, le seul point non trivial étant la surjectivité de la flèche de droite. En d'autres termes, il s'agit de montrer que toute forme $\gamma \in \Omega(U \cap V)$ s'écrit comme différence de formes s'étendant respectivement à U et V. Soit (θ_U, θ_V) une partition de l'unité associée au recouvrement $X = U \cup V$. Puisque $\operatorname{supp} \theta_V$ est contenu dans V, l'ouvert U est recouvert par les ouverts $U \cap V$ et $U \setminus \operatorname{supp} \theta_V$. Les formes $\theta_V \gamma \in \Omega(U \cap V)$ et $0 \in \Omega(U \setminus \operatorname{supp} \rho_V)$ étant égales sur l'intersection $U \cap V \setminus \operatorname{supp} \theta_V$, elles se recollent en une forme

$\alpha \in \Omega(U)$. De même, $-\rho_U\gamma$ se prolonge par 0 en $\beta \in \Omega(V)$, et on a par construction $\alpha|_{U\cap V} - \beta|_{U\cap V} = (\rho_V + \rho_U)\gamma = \gamma$.

Le cas à support compact se traite de même en considérant la suite exacte

$$0 \to \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(U) \oplus \Omega_c(V) \to \Omega_c(X) \to 0, \tag{8.4.2}$$

où la première flèche envoie $\gamma \in \Omega_c(U \cup V)$ sur ses prolongements par 0 à U et V, et la seconde envoie (α, β) sur la différence de leur prolongements par 0 à X. $\square$

Exercice 8.4.2. *En recouvrant la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par les calottes $\{x_{n+1} > -\varepsilon\}$ et $\{x_{n+1} < \varepsilon\}$, montrer par récurrence sur n que*

$$H^p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ pour } p = 0 \text{ ou } n; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Bons recouvrements

Définition 8.4.3. Un *bon recouvrement* $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'une variété X est un recouvrement ouvert localement fini tel que toute intersection finie $U_I := \bigcap_{i\in J} U_i$ avec $I \subset \mathbb{N}$ est soit vide, soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Théorème 8.4.4. *Toute variété X admet un bon recouvrement (U_i), qu'on peut de plus supposer raffinant n'importe quel recouvrement ouvert donné.*

Lemme 8.4.5. *Tout ouvert étoilé $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. On suit [GT]. On suppose Ω étoilé en 0, et on cherche un difféomorphisme $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sous la forme $\phi(x) = f(x)x$ telle que $f : \Omega \to \mathbb{R}_+^\times$ soit lisse et strictement croissante et propre sur chaque rayon $\Omega \cap \mathbb{R}_+x$. Cette condition implique que ϕ est bijective et que $d_xf(x) > 0$ en tout $x \in \Omega$, ce qui entraîne aisément que ϕ est un difféo local en tout point. On obtient f en posant

$$f(x) = \left(\int_0^1 g(tx)^{-1}dt\right)^2 \|x\|^2$$

avec $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ lisse telle que $\Omega = \{g > 0\}$. $\square$

Preuve du théorème 8.4.4. On suit [Dem, Lemma IV.6.9]. Soit $(V_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement localement fini de X par des cartes. Pour chaque $x \in X$ on note A_x l'ensemble (fini) des α tels que $x \in V_\alpha$, on choisit $\alpha_x \in A_x$ et on pose $\phi_x := \phi_{\alpha_x}$ et $g_x := \|\phi_x - \phi_x(x)\|^2$. Pour chaque $\alpha \in A_x$, $g_x \circ \phi_\alpha^{-1}$ est strictement convexe au voisinage de $\phi_\alpha(x)$, et donc sur $\phi_\alpha(\{g_x < \varepsilon\})$ pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$.

D'après l'exercice 4.1.9, on peut trouver une suite de points $x_i \in X$ et de constantes $0 < \varepsilon_i \ll 1$ tels que les ouverts $U_i := \{g_{x_i} < \varepsilon_i\}$ forment un recouvrement localement fini de X, et on pose $\phi_i := \phi_{x_i}$ et

$$g_i := g_{x_i} = \|\phi_i - \phi_i(x_i)\|^2.$$

Pour tout ensemble fini d'indices $i_0, \ldots, i_r$, on a alors

$$\phi_{i_0}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_r}) = \bigcap_{k=0}^{r} \{g_{i_k} \circ \phi_{i_0}^{-1} < \varepsilon_{i_k}\},$$

qui est convexe, et on conclut par le lemme 8.4.5. □

Corollaire 8.4.6. *Si X admet un bon recouvrement fini, alors $H(X)$ et $H_c(X)$ sont de dimension finie. En particulier, $H(X) = H_c(X)$ est de dimension finie lorsque X est compacte.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre d'ouverts d'un bon recouvrement fini, via Mayer-Vietoris. □

La dimension $b_p := \dim H^p(X)$ se nomme *p-ème nombre de Betti* de X.

8.5 Théorème de Leray et dualité de Poincaré

Théorème de Leray

Le corollaire 8.4.6 peut en fait être grandement précisé, pour fournir une description de la cohomologie de X en fonction de la combinatoire d'un bon recouvrement $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, on définit Σ_q comme l'ensemble des parties finies $I \subset \mathbb{N}$ de cardinal $q+1$ avec U_I non-vide. Une *q-cochaîne de Cech* est un élément $c = (c_I)$ de $C^q := \mathbb{R}^{\Sigma_q}$, et on définit la *différentielle de Cech* $\delta : C^q \to C^{q+1}$ en posant pour $c \in C^q$ et $I = \{i_0 < \cdots < i_{q+1}\}$ dans Σ_{q+1}

$$(\delta c)_I := \sum_{k=1}^{q} (-1)^k c_{I_k}$$

avec $I_k := \{i_0 < \cdots < i_{k-1} < i_{k+1} < \cdots < i_{q+1}\}$. On vérifie que $\delta \circ \delta = 0$, et on appelle *complexe de Cech* associé au (bon) recouvrement (U_i) le complexe $(C^\bullet, \delta)$ ainsi défini.

Le résultat suivant est un avatar en cohomologie de de Rham d'un théorème de Leray en cohomologie des faisceaux.

Théorème 8.5.1. *Si (U_i) est un bon recouvrement de X, alors $H^q(X)$ est isomorphe au q-ème groupe de cohomologie du complexe de Cech $(C^\bullet, \delta)$ associé au recouvrement (U_i).*

Démonstration. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, on définit le q-ème complexe de Mayer-Vietoris associé au recouvrement (U_i) comme

$$\mathrm{MV}^q := \prod_{|I|=q+1} \Omega(U_I)$$

muni de la différentielle induite par d sur chaque $\Omega(U_I)$. Puisque les U_I non vides sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$, on a

$$H^p(\mathrm{MV}^q) = \prod_{|I|=q+1} H^p(U_I) = \begin{cases} \mathbb{R}^{\Sigma_q(X)} \text{ pour } p = 0; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{8.5.1}$$

On définit pour chaque q un morphismes de complexes $\delta^q : \mathrm{MV}^q \to \mathrm{MV}^{q+1}$ en posant comme ci-dessus

$$(\delta\alpha)_I := \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \alpha_{I_k},$$

de sorte que la suite induite $H^0(\mathrm{MV}^0) \to H^0(\mathrm{MV}^1) \to \dots$ coïncide avec la complexe de Cech $C^0 \to C^1 \to \dots$ via l'identification (8.5.1). En utilisant une partition de l'unité (θ_i) subordonnée au recouvrement (U_i) comme dans le théorème 8.4.1, on montre que la suite

$$0 \to \Omega(X) \to \mathrm{MV}^0 \to \mathrm{MV}^1 \to \dots$$

est exacte, où la première flèche envoie $\alpha \in \Omega(X)$ sur $(\alpha|_{U_i}) \in \mathrm{MV}^0$ et les autres sont les δ^q. Si on note K^q le noyau de $\mathrm{MV}^q \to \mathrm{MV}^{q+1}$, on dispose donc de suites exactes courtes de complexes

$$0 \to K^0 \to \mathrm{MV}^0 \to K^1 \to 0,$$

$$0 \to K^1 \to \mathrm{MV}^1 \to K^2 \to 0,$$

$$\dots$$

$$0 \to K^{q-1} \to \mathrm{MV}^{q-1} \to K^q \to 0,$$

dont les suites exactes longues associées fournissent, au vu de (8.5.2), des isomorphismes

$$\mathrm{Im}\left[H^0(\mathrm{MV}^{q-1}) \to H^0(K^q)\right] \simeq H^1(K^{q-1}) \simeq \dots \simeq H^{q-1}(K^1) \simeq H^q(K^0) = H^q(X),$$

la dernière égalité découlant de $K^0 = \Omega(X)$. Ceci fournit l'isomorphisme recherché puisque $K^q = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{MV}^q \to \mathrm{MV}^{q+1}\right]$ implique

$$H^0(K^q) \simeq \mathrm{Ker}\left[H^0(\mathrm{MV}^q) \to H^0(\mathrm{MV}^{q+1})\right] \simeq \mathrm{Ker}\left[\delta : C^q \to C^{q+1}\right],$$

l'image de $H^0(\mathrm{MV}^{q-1}) \to H^0(K^q)$ correspondant à celle de $\delta : C^{q-1} \to C^q$. $\square$

Dualité de Poincaré

Théorème 8.5.2. *Pour toute variété orientée X de dimension n, l'accouplement*

$$H^q(X) \times H_c^{n-q}(X) \to \mathbb{R}$$

induit par $(\alpha, \beta) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$ fournit un isomorphisme $H^q(X) \simeq H_c^{n-q}(X)^\star$.

Corollaire 8.5.3. *Si X est connexe orientable, alors $H_c^n(X) \simeq \mathbb{R}$.*

Preuve du théorème 8.5.2. On choisit un bon recouvrement (X_i) de X, et on introduit pour chaque q le complexe

$$\mathrm{MV}_c^q := \prod_{|I|=q+1} \Omega_c^{n-\bullet}(U_I)^\star,$$

muni la différentielle induite par la transposée de d sur chaque facteur. Puisque chaque U_I non vide est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, le théorème 8.3.8 donne

$$H^p(\mathrm{MV}_c^q) = \begin{cases} \mathbb{R}^{\Sigma_q(X)} & \text{pour } p = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8.5.2}$$

On définit des morphismes de complexes $\delta : \mathrm{MV}_c^q \to \mathrm{MV}_c^{q+1}$ via des sommes alternées similaires à celles du théorème 8.5.1. Un argument de partition de l'unité montre que la suite ainsi définie

$$\Omega_c^{n-\bullet}(X)^\star \to \mathrm{MV}_0^c \to \mathrm{MV}_c^1 \to \dots$$

est exacte, et le même raisonnement que pour le théorème 8.5.1 fournit donc des isomorphismes

$$H_c^{n-q}(X)^\star \simeq H^q(H^0(\mathrm{MV}_c^\bullet)) \simeq H^q(C^\bullet).$$

En outre, on vérifie aisément que la diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^\bullet(X) & \longrightarrow & \mathrm{MV}^0 & \longrightarrow & \mathrm{MV}^1 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_c^{n-\bullet}(X)^\star & \longrightarrow & \mathrm{MV}_c^0 & \longrightarrow & \mathrm{MV}_c^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

induit par l'accouplement de dualité de X et des X_J commute au signe près. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^q(X) & \longrightarrow & H^q(C^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle{\mathrm{id}} \\ H_c^{n-q}(X)^\star & \longrightarrow & H^q(C^\bullet) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes, ce qui montre que la flèche de dualité en est également un. $\square$

8.6 Exercices

Exercice 8.6.1. *D'après le théorème 8.3.8, toute* 1*-forme fermée à support compact* α *sur* $\mathbb{R}^n$ *s'écrit* $\alpha = df$ *avec* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Donner une formule explicite pour une telle primitive* f*.*

Exercice 8.6.2. *Si* X *est une variétée compacte connexe orientable, montrer qu'un difféomorphisme de* X *renversant l'orientation ne peut être homotope à un difféomorphisme préservant l'orientation.*

Exercice 8.6.3 (Théorème de la boule chevelue, d'après Milnor)**.** *On va montrer que la sphère* S^n *admet un champ de vecteurs partout non-nul ssi* n *est impair.*

(i) *Si* $n = 2k - 1$ *est impair, montrer que*

$$v(x) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

définit un champ de vecteurs sur S^n *partout non-nul.*

(ii) *Soit* v *un champ de vecteurs partout non-nul sur* S^n*. Montrer qu'on peut supposer* $\|v(x)\| = 1$ *pour tout* x*, et vérifier que*

$$h_t(x) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x)$$

définit alors une homotopie entre l'identité de S^n *et l'antipodie.*

(iii) *Conclure via l'exercice 8.6.2.*

Exercice 8.6.4. *En utilisant le revêtement d'orientation (cf. exercice 7.5.5), montrer que toute variété non-orientable* X *satisfait* $H_c^n(X) = 0$*.*

Exercice 8.6.5. *Soit* G *un groupe fini agissant librement sur une variété* X*, et* $\pi : X \to Y := Y/G$ *le quotient associé. On rappelle qu'une* p*-forme sur* X *est* G*-invariante ssi elle est le tiré-en-arrière d'une* p*-forme sur* Y *(exercice 7.5.4.*

(i) Montrer que $\pi^* : H(Y) \to H(X)$ *induit un isomorphisme de* $H(Y)$ *sur* $H(X)^G$*.*

(ii) En déduire $H(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$*.*

Chapitre 9

Espaces d'applications

9.1 Topologies C^r

Le cas des ouverts euclidiens

Dans ce qui suit, on fixe $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Considérons pour commencer un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout entier (fini) $k \leq r$, on définit une seminorme sur l'espace vectoriel $C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ des applications $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe C^r en posant

$$\|f\|_{C^k(K)} := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\, |\alpha| \leq k,\, x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

Notons que cette seminorme est une norme sur le sous-espace $C^r_K(\Omega, \mathbb{R}^p)$ des applications à support dans K. La famille de seminormes $\|\cdot\|_{C^k(K)}$ sur $C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ le munit d'une structure de Fréchet ; on obtient en effet une famille dénombrable équivalente en restreignant K aux éléments d'un suite de compacts $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de l'un des deux types suivants, au choix :

(i) une suite exhaustive $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ de compacts de Ω ;

(ii) un recouvrement localement fini (K_i) de Ω par des compacts.

La topologie de $C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ ainsi définie, qu'on appellera la *topologie de la convergence C^r sur les compacts*, a le défaut de mal refléter les propriétés globales des applications $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$. En suivant Whitney et Thom, on introduit pour y remédier la *topologie C^r forte*, comme suit. On fixe une suite de compacts (K_i) comme dans (ii), et on demande que toute $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ admette pour base de voisinages les ensembles de la forme

$$\Big\{ g \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^p) \mid \|g - f\|_{C^{k_i}(\mathbb{K}_i)} \leq \varepsilon_i \text{ pour tout } i \Big\},$$

où (k_i) et (ε_i) sont des suites quelconques d'entiers $\leq r$ et de constantes strictement positives, respectivement. On note en effet que ces ensembles satisfont la condition (V) de l'exercice 1.1.19, et on vérifie aisément que la topologie C^r forte de $C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ ne dépend pas du choix de la suite (K_i).

Le cas des variétés

Considérons plus généralement deux variétés X, Y, et notons $C^r(X,Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ de classe C^r. Si (U, ϕ), (V, ψ) sont des cartes de X et Y, toute $f \in C^r(X,Y)$ induit une application de classe C^r

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \Omega := \phi(f^{-1}(V) \cap U) \to \mathbb{R}^p$$

sur un ouvert (éventuellement vide) de $\mathbb{R}^n$. Pour tout compact $K \subset U$ et tout entier et $k \leq r$, on peut donc définir une semidistance sur le sous-ensemble

$$\{f \in C^r(X,Y) \mid f(K) \subset V\}$$

en posant (de façon légérement abusive)

$$d_{C^k(K)}(f,g) := \left\|(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) - (\psi \circ g \circ \phi^{-1})\right\|_{C^k(\phi(K))}.$$

On définit alors la *topologie de la convergence* C^r *sur les compacts* de $C^r(X,Y)$ en demandant qu'une base de voisinages de $f \in C^r(X,Y)$ soit donnée par les sous-ensembles de la forme

$$\{g \in C^r(X,Y) \mid g(K) \subset V \text{ et } d_{C^k(K)}(g,f) \leq \varepsilon\}$$

où $K \subset U$ est un compact d'une carte de X envoyé par f dans une carte V de Y, $k \leq r$ est un entier et $\varepsilon > 0$.

Pour définir la *topologie* C^r *forte* sur $C^r(X,Y)$, on demande qu'une base de voisinage de f soit donnée par les ensembles de la forme

$$\left\{g \in C^r(X,Y) \mid g(K_i) \subset V_i \text{ et } d_{C^{k_i}(\mathbb{K}_i)}(f,g) \leq \varepsilon_i \text{ pour tout } i\right\}$$

avec

(i) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une recouvrement localement fini de X par des cartes relativement compactes de X ;
(ii) $K_i \subset X_i$ des compacts recouvrant encore X ;
(iii) (Y_i) une suite de cartes de Y telles que $f(K_i) \subset Y_i$;
(iv) (k_i) et (ε_i) des suites quelconques d'entiers $\leq r$ et de réels strictement positifs.

Exercice 9.1.1. *Justifier l'existence de (X_i), (K_i) et (Y_i) pour toute application continue $f : X \to Y$.*

Exercice 9.1.2. *Montrer que les ensemble précédents satisfont la condition (V) de l'exercice 1.1.19, et qu'on obtient déjà une base de voisinages de f en fixant (X_i), (Y_i) et (K_i) et en ne faisant varier que (k_i) et (ε_i).*

Proposition 9.1.3. *Les applications propres forment un ouvert de $C^r(X,Y)$ pour la topologie forte.*

Lemme 9.1.4. *Une application continue $f : X \to Y$ est propre ssi on peut trouver (X_i), (Y_i) et (K_i) comme ci-dessus avec (Y_i) localement finie.*

Démonstration. Si $K \subset Y$ est un compact, l'ensemble I_K des indices i tels que Y_i rencontre K est fini. Tout $x \in f^{-1}(\mathbb{K})$ appartient à un des X_i, et on a nécessairement $i \in I_K$ puisque $f(x) \in K \cap Y_i$, ce qui montre que $f^{-1}(\mathbb{K}) \subset \bigcup_{i\in I_K} \overline{X_i}$ est compact. □

9.2 Régularisation des applications

Le théorème de régularisation

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on établit maintenant la densité de $C^\infty(X, Y)$ dans $C^r(X, Y)$ pour la topologie forte. Plus précisément, on va montrer :

Théorème 9.2.1. *Si $f \in C^r(X, Y)$ est lisse au voisinage d'un fermé $A \subset X$, alors on peut trouver $g \in C^\infty(X, Y)$, arbitrairement proche de f en topologie C^r forte, telle que $g = f$ au voisinage de A.*

La stratégie consiste à modifier successivement f sur les cartes d'un atlas bien choisi, en s'appuyant sur le résultat suivant :

Lemme 9.2.2. *On suppose que $f \in C^r(X, Y)$ est lisse au voisinage d'un compact $L \subset X$, et on se donne des cartes $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \simeq \mathbb{R}^p$ de X et Y et un compact $K \subset U$ tel que $f(K) \subset V$. On peut alors trouver $g \in C^r(X, Y)$ arbitrairement proche de f en topologie C^r telle que :*
(i) g est lisse au voisinage de $L \cup K$;
(ii) $g = f$ en dehors d'un compact de U.

Démonstration. Quitte à remplacer U par $f^{-1}(V) \cap U$, on peut supposer que $f(U) \subset V$, de sorte que $\psi \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est bien définie et de classe C^r. On fixe une fonction plateau $\chi \in C^\infty_c(\Omega)$ pour K. Le théorème de régularisation habituel dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$, transporté dans la carte U, permet de choisir $h \in C^\infty(U, \mathbb{R}^p)$ arbitrairement proche de $\psi \circ f$ en topologie C^r sur $\operatorname{supp} \chi$, et il reste à poser

$$g := \begin{cases} \psi^{-1} \circ [(1-\chi)(\psi \circ f) + \chi h] \text{ sur } U \\ f \text{ sur } X \setminus U. \end{cases}$$

□

Preuve du théorème 9.2.1. Par souci de clarté, on commence par supposer que A est vide. On considère un recouvrement localement fini $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X par des cartes relativement compactes, des cartes $V_i \simeq \mathbb{R}^p$ de Y contenant $f(U_i)$, et des compacts $K_i \subset U_i$ recouvrant encore X. Etant données des suites (k_i) et (ε_i), il s'agit d'établir l'existence d'une application lisse $g : X \to Y$ satisfaisant pour tout i $g(K_i) \subset V_i$ et $d_{C^{k_i}(\mathbb{K}_i)}(g, f) \leq \varepsilon_i$. Pour ce faire, on construit par récurrence une suite d'applications $g_p : X \to Y$ de classe C^r telles que

(i) $g_p(K_i) \subset V_i$ et $d_{C^{k_i}(\mathbb{K}_i)}(g_p, g_{p-1}) \leq \varepsilon_i/2^p$ pour tout i ;
(ii) g_p est lisse au voisinage de $L_p := \bigcup_{i\leq p} K_i$;
(iii) $g_p = g_{p-1}$ en dehors d'un compact de U_p.
On pose $g_0 := f$, et on suppose g_{p-1} construite. Puisqu'elle est lisse au voisinage de L_{p-1}, le lemme 9.2.2 permet de trouver $g_p \in C^r(X, Y)$ arbitrairement proche de g_{p-1} en topologie C^r forte et satisfaisant (ii) et (iii). Puisque (K_i) est localement finie, (i) ne porte que sur un nombre fini d'indices et est donc satisfaite si g_p est suffisamment C^r-proche de g_{p-1}. La condition (iii) implique que la suite (g_p) ainsi construite est localement stationnaire, et admet donc une limite $g : X \to Y$, qui est lisse par (ii) puisque les K_i recouvrent X. Enfin, (i) donne pour tout i $g(K_i) \subset V_i$ et $d_{C^r(K_i)}(g, f) \leq \varepsilon_i$.

Si f est maintenant supposée lisse sur un voisinage ouvert Ω d'un fermé A, on raisonne de même à partir d'un recouvrement localement fini $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ par des ouverts de carte relativement compacts dont l'image $f(U_i)$ est contenue dans une carte $V_i \simeq \mathbb{R}^p$ de Y, et avec $U_i \subset \Omega$ pour $i < 0$ et $U_i \subset X \setminus A$ pour $i \geq 0$ (l'existence d'un tel recouvrement est laissée en exercice). Si on note K'_p le compact de U_p en dehors duquel $g_p = g_{p-1}$, la limite g ci-dessus coïncide alors avec f sur $X \setminus \bigcup_{i\geq 1} K'_i$, qui est un voisinage de A puisque $(K'_i)_{i\geq 1}$ est une famille localement finie de fermés ne touchant pas A. □

Quelques conséquences

Théorème 9.2.3. *Deux variétés X et Y qui sont C^1-difféomorphes sont C^∞-difféomorphes.*

Démonstration. Il suffit d'établir que les C^1-difféomorphismes $\phi : X \to Y$ forment un ouvert de $C^1(X, Y)$ pour la topologie forte. Pour ce faire, on peut supposer que X et Y sont connexes, auquel cas une application C^1 $\phi : X \to Y$ est un difféomorphisme ssi c'est un plongement fermé, i.e. une immersion injective et propre. D'après la proposition 9.1.3, la propreté est ouverte en topologie C^1 forte, et les plongements forment également un ouvert en topologie C^1 forte (exercice 9.4.5). □

Rappelons que deux variétés peuvent être homéomorphes sans être difféomorphes, cf. sphères de Milnor.

Théorème 9.2.4. *On peut définir de façon fonctorielle $f^* : H(Y) \to H(X)$ (resp $f^* : H_c(Y) \to H_c(X)$) pour une application continue $f : X \to Y$ est seulement continue (resp continue et propre).*

Ceci imlique en particulier le résultat suivant :

Théorème 9.2.5 (Invariance topologique de la dimension)**.** *Si deux variétés X, Y sont homéomorphes, alors* $\dim X = \dim Y$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un homéomorphisme $\phi : X \simeq Y$ mais que $n := \dim X > p := \dim Y$. Toute carte $U \subset X$ satisfait $H^n_c(U) \neq 0$, alors que $H^n_c(\phi(U)) = 0$, l'ouvert $\phi(U)$ étant de dimension $p < n$. □

9.3 Existence d'applications propres

On commence par une caractérisation utile de la compacité.

Proposition 9.3.1. *Soit X un espace localement compact, localement connexe par arcs et paracompact, et $x_0 \in X$ un point base. Il existe alors un rayon continu propre $\gamma : [0, +\infty[\to X$ d'origine x_0 ssi X est non-compact.*

Démonstration. On suit [Mor62, IV, Corollaire 6]. Quitte à remplacer X par la composante connexe de x_0, on peut supposer que X est connexe. Puisque $[0, +\infty[$ n'est pas compact, l'existence de γ empêche bien sûr X d'être compact. Supposons réciproquement X non compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de X par des ouverts relativement compacts et connexes par arcs. On fixe $i_0 \in I$ avec $x_0 \in U_{i_0}$, et on appelle *p-chaîne* un p-uplet d'indices $(i_1, \dots, i_p) \in I^p$ deux à deux distincts tel que $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $0 \le k < p$. Pour tout p, l'ensemble C_p des p-chaînes est fini (car le recouvrement est localement fini). Puisque X est connexe, tout point de X appartient au dernier ouvert U_{i_p} d'une p-chaîne pour un certain p (exercice 1.2.8). S'il existait $p_0 \in \mathbb{N}$ avec $C_p = \emptyset$ pour $p \ge p_0$, on pourrait donc écrire X comme réunion finie d'ouverts relativement compacts, ce qui contredirait la non-compacité de X. Comme la projection $\mathbb{N}^p \to \mathbb{N}^{p-1}$ envoie C_p dans C_{p-1}, il en résulte que C_p est non-vide pour tout p, et le lemme élémentaire ci-dessous entraîne donc l'existence d'une chaîne infinie, i.e. une application injective $\mathbb{N} \to I$ $k \mapsto i_k$ telle qu'il existe $x_k \in U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ pour tout k. Il reste alors à choisir pour chaque $k \in \mathbb{N}$ un chemin continu $\gamma_k : [k, k+1] \to U_{i_k}$ joignant x_k à x_{k+1}, et à définir γ comme la concaténation de ces chemins. □

Lemme 9.3.2. *Etant donnée une suite d'applications entre ensembles* finis *non-vides*

$$\dots \longrightarrow E_p \xrightarrow{f_p} E_{p-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f_1} E_0 \ ,$$

il existe une suite (x_p) avec $x_p \in E_p$ et $f_p(x_p) = x_{p-1}$ pour tout p.

Démonstration. Pour chaque $q \ge p$, on note $E_{pq} \subset E_p$ l'image de E_q dans E_p par l'application composée, et on observe que $E_{pq} \subset E_{pq'}$ si $q \ge q'$. Puisque E_p est fini, il existe donc $E'_p \subset E_p$ tel que $E_{pq} = E'_p$ pour tout q assez grand. Par construction, f_p induit une surjection $f'_p : E'_p \to E'_{p-1}$, et on est donc ramené au cas évident où les f_p sont toutes surjectives. □

Théorème 9.3.3. *Si X et Y sont deux variétés, les applications propres forment un ouvert non-vide de $C^\infty(X, Y)$, sauf si X est non-compacte et Y est compacte.*

Démonstration. La propreté étant ouverte, le théorème de régularisation montre qu'il suffit donc de construire une application continue propre $X \to Y$ si X est compacte ou si Y non-compacte. Dans le premier cas, une application constante fait l'affaire ; dans le second, la proposition 9.3.1 garantit l'existence d'un rayon propre $\gamma : \mathbb{R}_+ \to Y$, qu'il suffit alors de composer avec une fonction propre $f : X \to \mathbb{R}_+$, laquelle existe toujours d'après l'exercice 4.4.3. □

9.4 Exercices

Exercice 9.4.1. *On munit l'espace vectoriel $V = C^r(\Omega, \mathbb{R}^p)$ de la topologie C^r forte.*

(*i*) *L'addition fait de V un groupe topologique, mais pas un espace vectoriel topologique.*

(*ii*) *La composante neutre V^0 de V (i.e. la composante connexe de 0) coïncide avec l'espace $C^r_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ des fonctions à support compact.*

(*iii*) *V^0 n'est pas ouvert dans V, mais toute* suite *$(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de V convergeant vers $f \in V^0$ est à support dans un compact fixe pour tout i assez grand. En particulier, aucun point de V n'admet de base dénombrable de voisinages.*

(*iv*) *La topologie induite fait de $V^0 = C^r_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ un espace vectoriel topologique localement convexe tel que l'inclusion $C^r_K(\Omega, \mathbb{R}^p) \to C^r_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ est continue pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Remarque 9.4.2. On peut démontrer que la topologie C^r forte de $C^r_c(\Omega, \mathbb{R}^p)$ est la topologie la plus fine satisfaisant (iv). Pour $r = \infty$, ceci signifie que la topologie C^∞ forte sur $C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R})$ coïncide avec celle dont on le munit dans le cadre de la théorie des distributions.

Exercice 9.4.3. *Si X n'est pas compacte, aucun point de $C^r(X, Y)$ n'admet de base dénombrable de voisinages pour la topologie C^r forte.*

Exercice 9.4.4. *Si une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $C^r(X, Y)$ converge pour la topologie C^r forte, alors il existe un compact $K \subset X$ et i_0 tel que $f_i = f_{i_0}$ en dehors de K pour tout $i \geq i_0$.*

Exercice 9.4.5. *Pour $r \geq 1$, montrer que les immersions, les submersions et les plongements (plus dur) forment un ouvert de $C^r(X, Y)$ en topologie forte.*

Exercice 9.4.6. *Si on note*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

le graphe d'une application continue $f : X \to Y$, montrer que les ensembles de la forme

$$\mathcal{U}(\Omega) := \{f \in C^0(X,Y) \mid \Gamma_f \subset \Omega\}$$

forment une base de la topologie forte de $C^0(X,Y)$.

Exercice 9.4.7 (Théorème de Weierstrass)**.** *Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on va montrer que les polynômes sont denses dans $C^r(\Omega)$ pour la topologie de la convergence C^r sur les compacts.*

(*i*) *Quitte à multiplier $f \in C^r(\Omega)$ par une fonction plateau pour $K \subset \Omega$, on peut supposer qu'elle est à support compact. On introduit la gaussienne*

$$G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-x^2/2},$$

et l'approximation de l'unité associée $G_\delta(x) = \delta^{-n} G(x/\delta)$. Rappeler pourquoi le produit de convolution $f \star G_\delta$ converge vers f en topologie C^r faible.

(*ii*) *Conclure en tronquant le développement en série entière de G.*

(*iii*) *Le résultat reste-t-il vrai pour la topologie C^r forte ?*

Chapitre 10

Plongements et voisinages tubulaires

10.1 Le lemme de Sard «facile»

Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est *négligeable* s'il est de mesure de Lebesgue nulle, ce qui revient à dire que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon > 0$, $A \cap K$ peut être recouvert par un nombre fini de cubes C_i de diamètre δ_i tels que $\sum_i \delta_i^n \leq \varepsilon$.

Exercice 10.1.1. *Soient $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $f : \Omega \to \Omega'$ une application localement lipschitzienne (e.g. de classe C^1). Alors $f(A)$ est négligeable pour tout $A \subset \Omega$ négligeable.*

Ce résultat (ou le théorème du changement variable) implique en particulier que la notion d'ensemble négligeable est invariante par difféomorphisme, et on peut donc introduire :

Définition 10.1.2. Un sous-ensemble $A \subset X$ d'une variété est *négligeable* si tout point de A appartient à une carte (U, ϕ) telle que $\phi(U \cap A)$ soit négligeable.

En particulier, un ensemble négligeable A est d'intérieur vide, ce qui revient à dire que $X \setminus A$ est dense dans X.

Lemme 10.1.3 (Lemme de Sard facile)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application localement lipschiztienne entre deux variétés de dimension n, p respectivement.*

(i) Si $n = p$, l'image par f de toute partie négligeable de X est négligeable dans Y.

(ii) Si $n < p$ alors $f(X)$ est négligeable dans Y.

Démonstration. Le premier point résulte directement de l'exercice 10.1.1, et le second est conséquence du premier, puisque $f(X)$ est l'image de $X \times \{0\} \subset X \times \mathbb{R}^{p-n}$ par la composée $f \circ \pi$ avec $\pi : X \times \mathbb{R}^{n-p} \to X$ la première projection. $\square$

10.2 Le théorème de plongement de Whitney

Le but de cette partie est d'établir la version suivante du théorème de plongement de Whitney, énoncé sous cette forme dans [Mor62, IV, Corollaire 6].

Théorème 10.2.1. *Soient X et Y des variétés, de dimension respective n et p. Si $p > 2n$, alors X admet un plongement fermé dans Y, sauf si X est non-compacte et Y est compacte.*

En particulier, toute variété X de dimension n admet un plongement fermé dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, résultat célèbre dû à Hassler Whitney [Whit36], et qui implique par exemple :

Remarque 10.2.2. D'après [Whit44], on peut en fait trouver un plongement (a priori seulement localement fermé) de X dans $\mathbb{R}^{2n}$. Ce dernier résultat, nettement plus difficile à établir, est optimal, car le plan projectif réel, n'étant pas orientable, ne peut se plonger dans $\mathbb{R}^3$ (cf. exercice 7.5.2).

Théorème 10.2.3. *Si X et Y sont des variétés de dimensions respectives n, p telles que $p \geq 2n$ (resp $p > 2n$), alors les immersions (resp les immersions injectives) sont denses dans $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^∞ globale.*

Plus précisément, si une application lisse $f : X \to Y$ est une immersion (resp immersion injective) au voisinage d'un fermé $A \subset X$, alors on peut trouver une immersion (resp une immersion injective) $g : X \to Y$, arbitrairement proche de f en topologie C^∞ forte, telle que $g = f$ au voisinage de A.

Voyons d'abord pourquoi le théorème 10.2.3 implique le théorème de plongement ci-dessus.

Preuve du théorème 10.2.1. Les hypothèses garantissent que les applications propres forment un ouvert non-vide de $C^\infty(X, Y)$, d'après le théorème 9.3.3. Si $p > 2n$, le théorème 10.2.3 entraîne donc que X admet une immersion injective propre dans Y, ce qui est la même chose qu'un plongement fermé. □

On commence par un résultat local de perturbation linéaire.

Lemme 10.2.4. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est une application lisse sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $p \geq 2n$, alors $f + u|_\Omega$ est une immersion pour presque toute application linéaire $u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

Démonstration. Le théorème 10.2.5 ci-dessous implique que l'ensemble $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ des applications linéaires $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de rang $k \leq n-1$ est une sous-variété de de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de codimension au moins $p - n + 1 \geq n + 1$. Notons que $f + u|_\Omega$ n'est pas une immersion ssi il existe $x \in \Omega$ et $k < n$ tels que $d_x f + u|_\Omega \in \mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, i.e. ssi u est dans la projection par

$\Omega \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de l'image réciproque de $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ sous l'application

$$g : \Omega \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

définie par $g(x, u) := d_x f + u$. Il est clair que g est une submersion, et

$$g^{-1}(\mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)) \subset \Omega \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

est donc une sous-variété de codimension au moins $n + 1 > \dim \Omega$, i.e. de dimension $> \dim \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, et sa projection dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, R^p)$ est par conséquent de mesure nulle par le lemme de Sard facile. □

Théorème 10.2.5. *Soit V et V' deux espaces vectoriels (réels ou complexes) de dimension respective n, n'. L'ensemble $\mathrm{Hom}_r(V, V')$ des applications linéaires $\alpha : V \to V'$ de rang r forme une sous-variété (réelle ou complexe, localement fermée) de $\mathrm{Hom}(V, V')$, de codimension $(n - r)(n' - r)$ si $r \leq \min(n, n')$, et vide sinon.*

Démonstration. Soit $\alpha_0 : V \to V'$ une application linéaire de rang r, et choisissons un supplémentaire $U \subset V$ de $S := \mathrm{Ker}\, \alpha_0$ et un supplémentaire $S' \subset F$ de $U' := \mathrm{Im}\, \alpha_0$. Puisque α_0 induit un isomorphisme $U \simeq U'$, on peut supposer que $V = U \oplus S$, $V' = U \oplus S'$ et $\alpha_0 = \mathrm{id}_U \oplus 0$. Pour tout
$a \in \mathrm{Hom}(V, V')$ on définit $\phi_\alpha \in \mathrm{Hom}(V', V')$ par $\phi_\alpha(u + s') = \alpha(u) + s'$. On a $\phi_{\alpha_0} = \mathrm{id}_{V'}$, et ϕ_α est donc un isomorphisme pour α dans un voisinage ouvert $\Omega \subset \mathrm{Hom}(V, V')$ de α. En particulier, chaque $\alpha \in \Omega$ est injective sur U, et satisfait donc $\mathrm{rg}\, \alpha \geq r$, avec égalité ssi $\alpha S \subset \alpha U$. Afin de reformuler cette dernière condition, on note

$$\pi' : V' = U \oplus S' \to S'$$

la projection, on pose $g(\alpha) := \pi' \circ \phi_\alpha^{-1} : V' \to S'$, et on note que $\mathrm{Ker}\, g(\alpha) = vU$, de sorte que $\alpha S \subset \alpha U$ ssi

$$f(\alpha) := g(\alpha) \circ \alpha|_S \in \mathrm{Hom}(S, S')$$

est nulle. L'application $f : \Omega \to \mathrm{Hom}(S, S')$ ainsi définie est lisse, et il suffira donc de montrer que f est une submersion en α_0. Par bilinéarité de la composition, on a

$$d_{\alpha_0} f(h) = d_{\alpha_0} g(h) \circ \alpha_0|_S + g(\alpha_0) \circ h|_S.$$

pour tout $h \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Le premier terme est nul puisque u est nulle sur B, et $g(\alpha_0) = \pi'$ puisque $\phi_u = \mathrm{id}_{V'}$; on obtient donc $d_{\alpha_0} f(h) = \pi' \circ h|_S \in \mathrm{Hom}(S, S')$, ce qui montre que $d_{\alpha_0} f$ est bien surjective. □

En raisonnant comme pour le théorème de régularisation 9.2.1, la preuve du théorème 10.2.3 se ramène à établir les deux énoncés suivants.

Lemme 10.2.6. *On suppose $p \geq 2n$. Soit $f : X \to Y$ une application lisse, $L \subset X$ un compact au voisinage duquel f est une immersion, $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \simeq \mathbb{R}^p$ des cartes de X et Y, et $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$. Il existe alors une application lisse $g : X \to Y$, arbitrairement proche de f en topologie C^∞ forte, telle que*

(i) g est une immersion au voisinage de $K \cup L$;

(ii) g coïncide avec f en dehors d'un compact de U.

Démonstration. Quitte à remplacer U par $f^{-1}(V) \cap U$, on peut supposer que $f(U) \subset V$, de sorte que $\psi \circ f|_U$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Comme dans le lemme 9.2.2, on fixe une fonction plateau $\chi \in C_c^\infty(U)$ pour $K \subset U$. Pour traiter le cas $p \geq 2n$, il suffira de trouver $h \in C^\infty(U, \mathbb{R}^d)$ arbitrairement C^∞-proche de f sur $\operatorname{supp} \chi$ telle que h soit une immersion au voisinage de K, car on obtient alors g en posant

$$g := \begin{cases} \psi^{-1} \circ [(1-\chi)(\psi \circ f) + \chi h] \text{ sur } U \\ f \text{ sur } X \setminus U. \end{cases}$$

L'existence de h est une conséquence du lemme 10.2.4, qui implique que $h := \psi \circ f + u \circ \phi$ est une immersion sur U pour presque toute application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. $\square$

Lemme 10.2.7. *On suppose $p > 2n$. Soit $f : X \to Y$ une immersion, $L \subset X$ un compact au voisinage duquel f est injective, $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : V \simeq \mathbb{R}^p$ des cartes de X et Y telles que $f|_U$ soit un plongement, et $K \subset U$ un compact tel que $f(K) \subset V$. Il existe alors une immersion $g : X \to Y$, arbitrairement proche de f en topologie C^∞ forte, telle que*

(i) g est injective au voisinage de $K \cup L$;

(ii) g coïncide avec f en dehors d'un compact de U.

Démonstration. Comme avant, on peut supposer que $f(U) \subset V$, et on procède comme ci-dessus, avec maintenant h de la forme $h := \psi \circ f + c$ avec $c \in \mathbb{R}^p$ une constante suffisamment petite, et donc

$$g = \begin{cases} \psi^{-1} \circ [(\psi \circ f) + \chi c] \text{ sur } U \\ f \text{ sur } X \setminus U. \end{cases}$$

Puisque g est C^1-proche de f, elle reste une immersion, et il reste à montrer que g est injective au voisinage de $K \cup L$ pour un choix de $c \in \mathbb{R}^p$ arbitrairement petit. Comme on va le voir, il suffit pour ceci de prendre c en dehors de l'image de l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{(\psi \circ f)(x) - (\psi \circ f)(y)}{\chi(x) - \chi(y)} \in \mathbb{R}^p,$$

définie sur l'ouvert

$$\{(x, y) \in f^{-1}(V) \times f^{-1}(V) \mid \chi(x) \neq \chi(y)\}$$

de $X \times X$, et dont l'image est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$ par le lemme de Sard puisque $p > 2n$. Par hypothèse, f est injective sur U, et sur un voisinage $W \subset X$ de L, et on va montrer que g est injective sur $U' \cup W$ avec $U' := \{\chi > 0\}$. Supposons donnés $x, y \in U' \cup W$ avec $g(x) = g(y)$. Si $x, y \in W \setminus U'$, alors $f(x) = f(y)$, et donc $x = y$ par injectivité de f sur W. Si $x, y \in U'$, alors $(\psi \circ f)(x) + \chi(x)c = (\psi \circ f)(y) + \chi(y)c$, et le choix de c implique $\chi(x) = \chi(y)$, donc $(\psi \circ f)(x) = (\psi \circ f)(y)$, et à nouveau $x = y$ par injectivité de f sur U'. Enfin si $x \in U'$ et $y \in W \setminus U'$, alors $f(y) = g(y) = g(x)$ donne $y \in f^{-1}(V)$, et

$$(\psi \circ f)(x) + \chi(x)c = (\psi \circ f)(y) = (\psi \circ f) + \chi(y)c,$$

ce qui contredit le choix de c puisque $\chi(x) > 0 = \chi(y)$. □

10.3 Voisinages tubulaires

Le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème du voisinage tubulaire*, peut s'interpréter comme une énoncé de linéarisation transverse des plongements.

Théorème 10.3.1 (Théorème du voisinage tubulaire)**.** *Pour toute sous-variété X d'une variété Y, les plongements $X \hookrightarrow Y$ et $X \hookrightarrow N(X/Y)$ sont difféomorphes au voisinage de X. En particulier, X admet un voisinage ouvert $U \subset Y$ muni d'une* rétraction *lisse $r : U \to X$, i.e. une application telle $r|_X = \mathrm{id}_X$.*

Démonstration. Le théorème de plongement permet de supposer que Y est une sous-variété d'un espace vectoriel $V \simeq \mathbb{R}^N$; une fois choisi un produit scalaire sur V, on peut identifier les fibrés normaux aux orthogonaux des fibrés tangents, et les plongements $X \subset Y \subset V$ donnent alors

$$N(X/V) = N(X/Y) \oplus N(Y/V)|_X \subset TV|_X = X \times V.$$

On commence par montrer le résultat pour $Y \subset V$. La somme $\sigma(y, v) := y + v$ fournit une application lisse $\sigma : N(Y/V) \to V$, qui est un difféomorphisme en restriction à la section nulle $Z \subset N(Y/V)$. De plus, on vérifie facilement que la différentielle de σ est un isomorphisme en tout point de Z, et le lemme 10.3.2 ci-dessous implique donc que σ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de Z dans $N(Y/V)$ sur un voisinage ouvert $\Omega \subset V$ de Y.

En particulier, la projection $p : N(Y/V) \to V$ induit une rétraction $r : \Omega \to Y$, et $(x, v) \mapsto r(x + v)$ définit donc une application lisse $q : W \to Y$ sur un voisinage ouvert $W \subset N(X/Y)$ de la section nulle. On vérifie ici aussi que la différentielle de q est un isomorphisme en tout point de cette dernière, et on conclut à nouveau par le lemme 10.3.2. □

Lemme 10.3.2. *Soit $\pi : X \to Y$ une application lisse et $A \subset X$ une partie telle que* (*i*) *π est un difféomorphisme local en tout point de A ;*

(*ii*) *π induit un homéomorphisme de A sur son image.*

Alors π induit un difféomorphisme entre un voisinage ouvert de A et un voisinage ouvert de $\pi(A)$.

Démonstration. Par (i), on peut recouvrir A par des ouverts $X_i \subset X$ tels que π induise un difféomorphisme de X_i sur l'ouvert $Y_i := \pi(X_i)$ de Y, d'inverse $\phi_i : Y_i \to X_i$. La condition (ii) entraîne que $\pi(X_i \cap A) = Y_i' \cap \pi(A)$ avec $Y_i' \subset Y_i$ ouvert ; quitte à remplacer X_i par $X_i \cap \pi^{-1}(Y_i')$, on peut donc supposer que $\pi(X_i \cap A) = Y_i \cap \pi(A)$, ce qui implique que $\phi_i = (\pi|_A)^{-1}$ sur $Y_i \cap \pi(A)$.

En remplaçant X et Y par leurs ouverts $\bigcup_i X_i$ et $\bigcup_i Y_i$, on peut également supposer que π est un difféomorphisme local et que les Y_i recouvrent Y, et le lemme de rétrécisssement fournit alors un nouveau recouvrement ouvert (U_i) de Y tel que la famille de fermés $F_i := \overline{U_i}$ soit localement finie et satisfasse $F_i \subset Y_i$. On introduit alors

$$\Omega := \{y \in Y \mid \phi_i(y) = \phi_j(y) \text{ pour tous } i, j \text{ tels que } y \in F_i \cap F_j\}.$$

Puisque $\phi_i = (\pi|_A)^{-1}$ sur $F_i \cap \pi(A) \subset Y_i \cap \pi(A)$, Ω contient $\pi(A)$. Il va donc suffire de montrer que Ω est ouvert, puisque les ϕ_i définiront alors sur Ω un inverse ϕ de π, ce qui finira la démonstration. On se donne donc $y \in \Omega$, et on note I_y l'ensemble des indices i tels que $y \in F_i$. La famille (F_i) étant localement finie, y admet un voisinage $V \subset Y$ ne rencontrant qu'un nombre fini de F_i, et on peut supposer que ceci ne se produit que pour $i \in I_y$, quitte à remplacer V par $V \setminus \bigcup_{i \notin I_y} F_i$. Quitte à restreindre encore V, on peut enfin supposer que $\phi_i = \phi_j$ sur V pour tous $i, j \in I_y$, puisque cette dernière condition implique ϕ_i et ϕ_j coïncident en y, et donc sur un voisinage de y, étant inverses du même difféomorphisme local π.

Si $y' \in V$ appartient à $F_i \cap F_j$, alors on a $i, j \in I_y$, d'où $\phi_i(y') = \phi_j(y')$. Ceci montre que V est contenu dans Ω, qui est donc bien un ouvert. □

10.4 Exercices

Exercice 10.4.1. *Montrer que le fibré normal d'une sous-variété fermée $Y \subset X$ est trivial ssi il existe Y admet des équations globales, i.e. s'il existe des fonctions lisses $f_1, \dots, f_p$ définies sur un voisinage ouvert $U \subset X$ de Y, de différentielles linéairement indépendantes et telles que*

$$Y = \{f_1 = \cdots = f_p = 0\}.$$

Exercice 10.4.2. *Le but de cet exercice est de montrer que tout fibré vectoriel réel E de rang r sur une variété X de dimension n peut s'écrire comme quotient d'un fibré trivial de rang $p = n + r$.*

(*i*) *Rappeler pourquoi l'espace des sections $\Gamma(X, E)$, muni de la topologie de la convergence C^∞ sur les compacts, est un espace métrique complet.*

(ii) *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et tout compact* $K \subset X$, *montrer que l'ensemble* Ω_K *des morphismes* $\phi : X \times \mathbb{R}^p \to E$ *avec* ϕ_x *surjectif pour tout* $x \in K$ *est un ouvert de* $\Gamma(X, \mathrm{Hom}(X \times \mathbb{R}^p, E))$. *D'après le lemme de Baire, il suffira donc d'établir que chaque* Ω_K *est dense si* $p \geq n + r$.

(iii) *On rappelle que si* V *est un espace vectoriel de dimension* r, *l'ensemble* $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^p, V)$ *des application linéaires* $\phi : \mathbb{R}^p \to V$ *de rang* $k < r$ *est une sous-variété de* $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, V)$ *de codimension* $(p - k)(r - k) \geq n + 1$. *(théorème 10.2.5). Montrer que*

$$\mathrm{Hom}_k(X \times \mathbb{R}^p, E) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Hom}_k \mathbb{R}^p, E_x)$$

est une sous-variété de $\mathrm{Hom}(X \times \mathbb{R}^p, E)$ *de codimension au moins* $n+1$.

(iv) *L'exercice 5.4.5 permet de choisir un morphisme* $\alpha : X \times \mathbb{R}^N \to E$ *qui soit surjectif en restriction à un voisinage* $U \Subset X$ *de* K. *Etant donné un morphisme* $\phi : X \times \mathbb{R}^p \to E$, *montrer que*

$$\phi|_U + \alpha \circ u : U \times \mathbb{R}^p \to E|_U$$

est surjectif pour presque tout $u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^N)$, *et conclure.*

(v) *Adapter l'énoncé au cas des fibrés vectoriels complexes.*

Bibliographie

[BT] R. Bott, L. Tu. *Differential forms in algebraic topology.* GTM **82**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Bou] N. Bourbaki. *Topologie générale.*

[Dem] J.-P. Demailly. *Complex analytic and differential geometry.* `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf`.

[GodR] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles **1252**. Hermann, Paris, 1973.

[GodC] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris, 1971.

[GT] S. Gonnord, N. Tosel. *Calcul différentiel : thèmes d'analyse pour l'agrégation.* Ellipses.

[Hir] M. Hirsch. *Differential topology.* GTM **33**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Hirz] F. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kui67] N. Kuiper. *Algebraic equations for non-smoothable 8-manifolds.* Publ. Math. IHES. **33** (1967), 139–155.

[Lan] S. Lang. *Fundamentals of differential geometry.* GTM **191**, Springer-Verlag, New York, 1999.

[Lee] J. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* 2nd edition.

[Mil56] J. Milnor. *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere.* Ann. Math. **64** (1956), 399–405.

[MilDT] J. Milnor. *Differential topology.* Lectures on Modern Mathematics, Vol. II, 165–183. Wiley, New-York.

[MilTD] J. Milnor. *Topology from the differentiable point of view.* Princeton University Press, Princeton, 1997.

[Mor62] C. Morlet. *Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, I–IV*. Séminaire Henri Cartan (topologie différentielle) **14** (1961-1962), no. 7.

[Pal61] R.S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*. Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323.

[Spi] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1979.

[Whit36] H. Whitney. *Differentiable manifolds*. Ann. of Math. **37**, no 3, (1936), 645–680.

[Whit44] H. Whitney. *The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space*. Ann. of Math. **45**, no 2, (1944), 220–246.