EXAMEN DU COURS MAT553
16 DÉCEMBRE 2019

Généralités

- Durée de l'épreuve : 3h.
- Notes de cours et dictionnaires autorisés.
- Réponses en anglais admises.
- Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des questions pour avoir une excellente note ; par contre, la précision de la rédaction sera déterminante.

Conventions et notations

- Une variété X est toujours supposée de classe C^∞, séparée et à base dénombrable. Elle est donc paracompacte, et admet des partitions de l'unité de classe C^∞.
- On note $\Omega_c^p(X)$ l'espace des p-formes α sur X dont le support $\operatorname{supp}\alpha$ est compact, et $C_c^\infty(X) = \Omega_c^0(X)$ celui des fonctions lisses $f : X \to \mathbb{R}$ à support compact. On rappelle que pout tout ouvert $U \subset X$, on a une identification canonique
$$\Omega_c^p(U) = \{\alpha \in \Omega_c^p(X) \mid \operatorname{supp}\alpha \subset U\},$$
en prolongeant les formes de $\Omega_c^p(U)$ par 0.
- Pour tout ensemble I, on note $\mathbb{R}^{(I)}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie ssi I est fini) formé des familles de réels $(c_i)_{i\in I}$ telle que $c_i = 0$ pour presque tout i, i.e. pour tout i en dehors d'un ensemble fini. Cet espace vectoriel est muni d'une base canonique $(e_i)_{i\in I}$, avec e_i ayant une entrée 1 en i-ème position, et 0 ailleurs.

1. Exercice

On considère des entiers $a, b \geq 2$ premiers entre eux, et on pose
$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^a = x^b\}.$$

1.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions lisses telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $(f(t), g(t)) \in C$ pour tout $t \in I$. Montrer que $f(t) = O(t^a)$ et $g(t) = O(t^b)$ au voisinage de 0.

1.2. En déduire que C n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

1.3. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(t) = (t^a, t^b)$ est propre.

1.4. Montrer que ϕ induit un homéomorphisme $\mathbb{R} \simeq C$. On rappelle que a et b engendrent $\mathbb{Z}$ comme groupe (théorème de Bézout).

2. Exercice

Soit X un espace topologique connexe, et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts non-vides. On pose

$$\Gamma := \{(i,j) \in I \times I \mid U_i \cap U_j \neq \emptyset\}.$$

2.1. On appelle *chaîne* une suite $i_1, \dots, i_r$ de I telle que $(i_k, i_{k+1}) \in \Gamma$ pour $k = 1, \dots, r-1$, i_1 et i_r étant les *extrémités* de la chaîne. Montrer que pour toute paire $i, j \in I$, il existe une chaîne d'extrémités i et j. On pourra observer que

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{ il existe } i, j \text{ extrémités d'un chaîne avec } x \in U_i,\ y \in U_j$$

définit une relation d'équivalence sur X dont les classes d'équivalence sont ouvertes.

2.2. On note $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(I)}$ (cf. notations ci-dessus). Montrer que la famille de vecteurs $\{e_i - e_j \mid (i,j) \in \Gamma\}$ engendre l'hyperplan

$$\{c = (c_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \mid \sum_i c_i = 0\}.$$

3. Problème

Le but de ce problème est d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit X une variété connexe orientée de dimension n, et $\alpha \in \Omega^n_c(X)$ une n-forme à support compact. Alors*

$$\int_X \alpha = 0 \Longleftrightarrow \textit{ il existe } \beta \in \Omega_c^{n-1}(X),\ \alpha = d\beta.$$

On rappelle que $\int_X : \Omega^n_c(X) \to \mathbb{R}$ est l'intégrale sur la variété orientée X, et que l'implication $\Longleftarrow$ est un cas particulier du théorème de Stokes.

On considère pour commencer le cas $X = \mathbb{R}^n$, dont on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées canoniques. On fixe une fonction $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi(t)dt = 1$.

3.1. Etant donnée $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, on définit $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ et $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en posant

$$g(x_2, \dots, x_n) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x_2, \dots, x_n)dt$$

et

$$h(x_1, \dots, x_n) := \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n)dt - \left(\int_{-\infty}^{x_1} \chi(t)dt\right) g(x_2, \dots, x_n).$$

Montrer que g et h sont toutes deux à support compact.

3.2. Montrer que

$$d\,(h\,dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (f(x_1, \dots, x_n) - \chi(x_1)g(x_2, \dots, x_n))\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

3.3. Etablir le théorème pour $X = \mathbb{R}^n$, en raisonnant par récurrence sur n.

On considère maintenant le cas général, et on se donne $\alpha \in \Omega^n_c(X)$ telle que $\int_X \alpha = 0$.

3.4. Montrer qu'on peut choisir un recouvrement de X par une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X munis de difféomorphismes $\phi_i : U_i \simeq \mathbb{R}^n$ préservant l'orientation.

3.5. Montrer qu'il existe une famille de formes $\alpha_i \in \Omega_c^n(U_i)$, $i \in I$, nulles pour presque tout i, telles que $\alpha = \sum_i \alpha_i$.

3.6. On pose comme dans l'exercice 2

$$\Gamma := \{(i, j) \in I \times I \mid U_i \cap U_j \neq \emptyset\}.$$

Pour chaque $(i, j) \in \Gamma$, montrer qu'il existe $\omega_{ij} \in \Omega_c^n(U_i \cap U_j)$ telle que $\int_X \omega_{ij} = 1$.

3.7. On pose $\omega_{ij} := 0$ pour $(i, j) \notin I \times I$. Montrer qu'il existe une famille de réels $(c_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$, nuls pour presque toute paire (i, j), tels qu'on ait pour tout $i \in I$

$$\int_X \alpha_i = \int_X \sum_j (c_{ij}\omega_{ij} - c_{ji}\omega_{ji}) \, .$$

On pourra utiliser librement l'exercice 2.

3.8. Conclure.