EXAMEN DU COURS MAT553

Généralités

- Durée de l'épreuve : 3h.
- Notes de cours et dictionnaires autorisés.
- Réponses en anglais admises.
- Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des questions pour avoir une excellente note ; par contre, la précision de la rédaction sera déterminante.

Conventions et notations

- Une variété X est toujours supposée séparée et à base dénombrable.
- Etant donnée une application lisse $\gamma : I \to X$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, le vecteur vitesse $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}X$ en $t \in I$ est défini comme l'image de la base canonique $1 \in \mathbb{R} = T_t I$ par la différentielle de γ.
- Si $f : X \to Y$ est une application lisse entre variétés, son *rang* $\mathrm{rg}_x(f)$ en $x \in X$ est défini comme celui de la différentielle $d_x f : T_x X \to T_{f(x)}Y$.

1. Exercice

On rappelle qu'un *groupe topologique* G est un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication $G \times G \to G$ $(g,h) \mapsto gh$ et le passage à l'inverse $G \to G$ $g \mapsto g^{-1}$ sont continues.

On se donne un sous-groupe H d'un groupe topologique G, et on se propose de montrer que H est localement fermé dans G ssi il est fermé.

1.1. Montrer que H ouvert implique H fermé.

1.2. Si $f : X \to Y$ est une application continue entre espaces topologiques, montrer que toute partie $A \subset X$ satisfait $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

1.3. En déduire que l'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-groupe (fermé) de G.

1.4. Montrer qu'une partie Z d'un espace topologique X est localement fermée ssi Z est ouverte dans $\overline{Z}$.

1.5. Conclure.

2. Problème

On introduit pour la suite les notions suivantes (qui ne sont bien sûr pas supposées connues).

- Un *groupe de Lie* G est un groupe muni d'une structure de variété pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont lisses.
- Un *morphisme de groupes de Lie* $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes qui est lisse en tant qu'application entre variétés.
- Un *sous-groupe de Lie* d'un groupe de Lie G est une partie H de G qui est à la fois un sous-groupe et une sous-variété.
- Si G est un groupe de Lie, une G-*variété* est une variété X munie d'une action lisse de G, i.e. pour laquelle l'application d'action $G \times X \to X$ $(g, x) \mapsto g \cdot x$ est lisse.
- On admettra le résultat suivant (qui peut se déduire du théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles) :

  Théorème A. *Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e. Pour tout vecteur $v \in T_eG$, il existe un unique morphisme de groupes de Lie*
  $$\gamma_v : (\mathbb{R}, +) \to G$$
  tel que $\gamma_v'(0) = v$.

2.1. Montrer que la multiplication matricielle usuelle fait de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ un groupe de Lie, et que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ en est un sous-groupe de Lie, dont on précisera l'espace tangent en l'identité.

2.2. Montrer que tout sous-groupe de Lie $H \subset G$ d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie, et qu'il est fermé dans G.

On se donne un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ d'un groupe de Lie.

2.3. Montrer que Γ est un sous-groupe de Lie.

2.4. Montrer que l'action de Γ sur G par translation à gauche (i.e. $\gamma \cdot g = \gamma g$) est propre.

On suppose de plus Γ distingué dans G, i.e. $g\Gamma g^{-1} \subset \Gamma$ pour tout $g \in G$.

2.5. Montrer que l'ensemble quotient G/Γ est muni d'une unique structure de groupe de Lie telle que la projection $\pi : G \to G/\Gamma$ soit un morphisme de groupes de Lie et un difféomorphisme local.

On considère maintenant une application lisse $f : X \to Y$ entre deux G-variétés, qui soit G-*équivariante*, i.e. telle que
$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$
pour tous $g \in G$, $x \in X$.

2.6. Montrer que le rang de f est constant le long des orbites de G, i.e.

$$\mathrm{rg}_x(f) = \mathrm{rg}_{g\cdot x}(f)$$

pour tous $x \in X$, $g \in G$.

2.7. On suppose que l'action de G sur X est transitive, et qu'il existe $x \in X$ avec $d_x f$ injective. Montrer que f est une immersion.

On se donne pour finir une G-variété X, et on note $\alpha_x : G \to X$ l'application d'orbite d'un point $x \in X$, i.e. $\alpha_x(g) = g \cdot x$.

2.8. Soit $v \in T_e G$, et $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ comme dans le théorème A ci-dessus. Montrer que

$$v \in \operatorname{Ker} d_e\alpha_x \iff \frac{d}{dt}\alpha_x(\gamma_v(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On pourra observer que

$$\alpha_x(\gamma_v(t+s)) = \gamma_v(t) \cdot \alpha_x(\gamma_v(s)).$$

2.9. On suppose que l'action de G sur X est libre. Montrer que α_x est une immersion.

2.10. On suppose enfin que l'action de G sur X est propre et libre. Montrer que chaque orbite $G \cdot x$ est une sous-variété fermée de X.