EXAMEN DU COURS DE TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE MAT553

Généralités

- Durée de l'épreuve : 3h.
- Notes de cours et dictionnaires autorisés.
- Réponses en anglais admises.
- Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des exercices et du problème pour avoir une excellente note ; par contre, la précision de la rédaction sera déterminante.

Conventions

- On rappelle que toute variété X est implicitement supposée à base dénombrable, et donc paracompacte.
- Une *hypersurface* est une sous-variété de codimension 1.

1. Exercices

Exercice 1. *On note comme d'habitude S^n la sphère euclidienne unité centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$.*

(i) Montrer que S^n est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, et préciser son espace tangent en un point $x \in S^n$ donné.

(ii) Montrer que l'application $\mathbb{R} \times S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ donnée par $(t, x) \mapsto e^t x$ est un difféomorphisme.

(iii) En utilisant (ii), montrer par récurrence sur k que tout produit de sphères $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ est difféomorphe à une hypersurface de $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$.

Exercice 2. *Soit $\alpha \in \Omega^p(X)$ une forme différentielle de degré p sur une variété orientée X de dimension n.*

(i) On se donne une carte $U \subset X$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, de sorte que

$$\alpha|_U = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\},\, |I|=p} \alpha_I \, dx_I$$

avec $\alpha_I \in C^\infty(U)$ et $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ si $i_1 < \cdots < i_p$ désignent les éléments de I ordonnés par ordre croissant.

Pour chaque I, montrer qu'il existe une $(n-p)$-forme $\gamma \in \Omega^{n-p}(U)$ telle que

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha_I^2 \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(ii) En déduire que $\alpha = 0$ si et seulement si $\int_X \alpha \wedge \beta = 0$ pour toute $(n-p)$-forme à support compact $\beta \in \Omega_c^{n-p}(X)$.

(iii) On rappelle que le théorème de Stokes implique $\int_X d\gamma = 0$ *pour toute forme à support compact* $\gamma \in \Omega_c^{n-1}(X)$*. Montrer que* α *est fermée ssi*

$$\int_X \alpha \wedge d\beta = 0$$

pour toute $\beta \in \Omega_c^{n-p-1}(X)$*.*

2. Problème

Soit X une variété de dimension n, et $H \subset X$ une hypersurface. On note

$$NH := TX|_H / TH$$

son fibré normal, qui est donc un $\mathbb{R}$-fibré vectoriel de rang 1 sur H (i.e. un fibré en droites réel). Si $U \subset X$ est un ouvert, on appelle *équation de* H *sur* U une fonction $f \in C^\infty(U)$ telle que :

(a) $H \cap U = \{f = 0\}$;
(b) $d_x f \neq 0$ pour tout $x \in H \cap U$.

2.1. Soit f une équation de H sur un ouvert $U \subset X$.

2.1.1. Montrer que tout point $x \in U \cap H$ appartient à une carte $V \subset U$ dont les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ vérifient $x_1 = f$.

2.1.2. En déduire que $T_x H = \operatorname{Ker} d_x f$, et montrer que la différentielle $df : TX|_U \to \mathbb{R}$ induit une trivialisation

$$Nf : NH|_{U \cap H} \simeq (U \cap H) \times \mathbb{R}.$$

2.2. Soit $U \subset X$ un ouvert, $f \in C^\infty(U)$ une fonction telle que $f|_{H \cap U} = 0$, et $x \in H \cap U$ un point tel que $d_x f \neq 0$.

2.2.1. Montrer que x admet un voisinage ouvert $V \subset U$ tel que $H' := V \cap \{f = 0\}$ soit une hypersurface de V.

2.2.2. Montrer que $H \cap V$ est une sous-variété de H', et en déduire que x admet un voisinage ouvert $W \subset V$ sur lequel f est une équation de H.

2.3. On suppose le fibré normal NH trivial, et on choisit une trivialisation $\phi : NH \simeq H \times \mathbb{R}$. On dit alors qu'une équation f de H sur U est *ϕ-positive* s'il existe une fonction lisse strictement positive $\lambda : U \cap H \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $Nf = \lambda\, \phi|_{U \cap H}$.

2.3.1. Montrer que H peut être couvert par une famille (U_i) d'ouverts de X munis d'équations ϕ-positives $f_i \in C^\infty(U_i)$ pour H.

2.3.2. On note U la réunion des U_i, et on choisit une partition de l'unité (θ_i) sur U, subordonnée au recouvrement ouvert (U_i). En utilisant 2.2.2, montrer que $f := \sum_i \theta_i f_i$ fournit une équation de H sur un voisinage ouvert de celui-ci.

2.4. Montrer que H admet une équation définie sur un voisinage ouvert de H si et seulement si NH est trivial, et discuter du lien avec le théorème du voisinage tubulaire.

2.5. Soit Z un espace topologique. Le *bord* d'une partie $A \subset Z$ est défini comme le fermé $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

2.5.1. Montrer qu'un point $p \in Z$ appartient à ∂A si et seulement si chaque voisinage de p dans Z intersecte à la fois A et $X \setminus A$.

2.5.2. Pour tout ouvert $U \subset Z$, montrer que $U \cap \partial A$ coïncide avec le bord de $U \cap A$ en tant que partie de U.

2.6. Un ouvert non vide $\Omega \subset X$ est dit *à bord lisse* si tout point de X appartient à une carte $\phi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\phi(U \cap \Omega) = \phi(U) \cap D,$$

où $D \subset \mathbb{R}^n$ désigne le demi-espace défini par $x_1 < 0$.

2.6.1. Soit $\Omega \subset X$ un ouvert à bord lisse. Montrer que $\partial\Omega$ est une hypersurface fermée de X, et que $\Omega' := X \setminus \partial\Omega$ est aussi un ouvert à bord lisse, avec $\partial\Omega = \partial\Omega'$.

2.6.2. Si H est une hypersurface admettant une équation f définie sur X, montrer que $\Omega := \{f < 0\}$ est un ouvert à bord lisse, avec $\partial\Omega = H$.

2.6.3. Considérons réciproquement un ouvert à bord lisse $\Omega \subset X$. En adaptant l'approche de 2.3.2, montrer que $\partial\Omega$ admet une équation f définie sur X telle que $\Omega = \{f < 0\}$.

2.6.4. Montrer que $\Omega = \{x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas un ouvert à bord lisse, bien que $\partial\Omega$ soit une hypersurface.

2.6.5. On pose $X := S^1 \times S^1$ et $H = S^1 \times \{p\}$ avec $p \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ un point du cercle. Montrer que H est une hypersurface de X dont le fibré normal est trivial, mais que H n'admet pas d'équation définie sur X tout entier.